Devoir n° 6 23, 19/01/2010

I) $\mathcal{E} : x^2+2x+y^2+2y=2$

① $A(-1;-3) \in \mathcal{E}$?

$(-1)^2+2\times(-1)+(-3)^2+2\times(-3) = 1-2+9-6$
$= +2$ donc $A \in \mathcal{E}$

$B(-2;-3) \in \mathcal{E}$?

$(-2)^2+2(-2)+(-3)^2+2(-3) = 4-4+9-6$
$= +3$ donc $B \notin \mathcal{E}$

② l'axe des abscisses est l'ensemble des points tels que $y=0$.

donc M est un point d'intersection de $\mathcal{E}$ et $(x'x)$ $\iff \begin{cases} x^2+2x+y^2+2y=2 \\ y=0 \end{cases}$

d'où $x^2+2x=2 \iff x^2+2x+1=3$
$\iff (x+1)^2=3$ d'où $x+1=\sqrt{3}$ ou $x+1=-\sqrt{3}$
$\iff x=\sqrt{3}-1$ ou $x=-\sqrt{3}-1$

les points d'intersection sont $M_1(\sqrt{3}-1;0)$; $M_2(-\sqrt{3}-1,0)$.

donc $S=\{\sqrt{3}-1;-\sqrt{3}-1\}$

) $A(2;2)$; $B(6;1)$

) $M(x;y) \in (AB) \iff \vec{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix}$; $\vec{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ colinéaires

$\iff xy'-x'y=0$

$\iff -(x-2)-4(y-2)=0 \iff -x+2-4y+8=0$

$\iff 4y=-x+10 \iff y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$

on a $(AB) : y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$

L'axe des abscisses a pour éq $y=0$ d'où $M(x,y) \in (AB)\cap(x'x)$

$\iff \begin{cases} y=0 \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y=0 \\ -\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x=\frac{-5/2}{-1/4}=10 \end{cases}$

d'où $M(10,0)$ point d'intersect°.

① $\vec{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{OA}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{OB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$AB^2=20$; $OA^2=5$; $OB^2=25$ d'où $OB^2=OA^2+AB^2$

$\Rightarrow$ OBA rectangle en A d'après la réciproque de Pythagore

②@C centre du cercle circonscrit à ABO.

C est le cercle de diamètre [OB] car [OB] hypothénuse de ABO.

d'où C milieu de [OB] $\Rightarrow \begin{cases} x_C = \frac{x_O + x_B}{2} \\ y_C = \frac{y_O + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3/2 \\ y_C = 2 \end{cases}$ d'où $C(\frac{3}{2} ; 2)$

$\vec{CP}\begin{pmatrix} 5/2 \\ +1 \end{pmatrix}$

donc $CP^2 = \frac{25}{4} + 1 = \frac{29}{4} \Rightarrow CP = \frac{\sqrt{29}}{2}$

d'autre part $\mathcal{C}$ a pour rayon $\frac{OB}{2} = \frac{5}{2}$. Donc $CP \neq \frac{5}{2} \Rightarrow P \notin \mathcal{C}$

ⓑ D symétrique de A par rapport à C

donc C milieu de [AD]

d'autre part C milieu [OB]

d'où dans le quadrilatère ABDO les diagonales se coupent en leur milieu

$\Rightarrow$ ABDO parallélogramme

De plus il possède un angle droit en A $\Rightarrow$ ABDO rectangle

③ⓐ Soit $M(x;y)$; $\vec{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ $\vec{AO}\begin{pmatrix} +1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{AD}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⊛

$\vec{AM} = 2\vec{AO} + \vec{AD}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 2+5 \\ y-2 = -4+0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow M(6;-2)$

⊛ Coordonnées de D:

$\vec{AD} = 2\vec{AC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 1 = 2 \cdot 5/2 \\ y_D - 2 = 2 \times 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 2 \end{cases} \Rightarrow D(4;2)$

$\vec{BD}\begin{pmatrix} +1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{BM}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{BM} = 3\vec{BD} \Rightarrow$ B, D, M alignés (colinéarité des vecteurs)

④ⓐ $M(x,y) \in (AB) \Leftrightarrow \vec{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ colinéaires

$\Leftrightarrow XY' - X'Y = 0$

$\Leftrightarrow 2(x+1) - 4(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 4y + 10 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

d'où (AB) : $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

ⓑ l'axe $(y'y)$ a pour équation $x = 0$. Le point d'intersect° est donc $H(0; \frac{5}{2})$

ⓒ $E(-24;-9) \in (AB)$?

$\frac{1}{2}(-24) + \frac{5}{2} = -\frac{19}{2} \neq -9$ donc $E \notin (AB)$.