2^3 # DS 10 13 avril 2010

(I) ① Il y a deux carrés : un de côté x et l'autre de côté $6-x$.
l'aire totale est donc $\mathcal{A}(x) = x^2 + (6-x)^2$
$= x^2 + 36 - 12x + x^2 = 2x^2 - 12x + 36$

② On a pour $x \in \mathbb{R}$, $2(x-3)^2 + 18 = 2(x^2 - 6x + 9) + 18$
$= 2x^2 - 12x + 36 = \mathcal{A}(x)$

Ainsi l'égalité est vraie.

③ $\mathcal{A}(x) = 26$

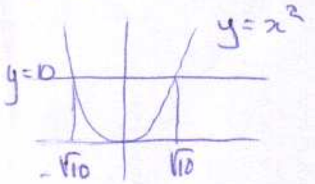
$\iff 2(x-3)^2 + 18 = 26$

$\iff 2(x-3)^2 = 8 \iff (x-3)^2 = 4 \iff x-3 = 2$ ou $x-3 = -2$

$\iff x = 5$ ou $x = 1$

pour $x = 1$ ou $x=5$, $\mathcal{A}(x)$ vaut 26 cm^2

(II) ⓐ $x^2 < 10$ On a $S =]-\sqrt{10} ; +\sqrt{10}[$.



ⓑ $x^2 > -2$ est toujours vrai car $x^2 \geq 0$ d'où $S = \mathbb{R}$

ⓒ $(x-4)^2 = 5 \iff x-4 = \sqrt{5}$ ou $x-4 = -\sqrt{5}$
$\iff x = 4+\sqrt{5}$ ou $x = 4-\sqrt{5}$; $S = \{4+\sqrt{5}, 4-\sqrt{5}\}$

(III) ① ⓐ Graphiquement, on lit que -3 et 0 sont les antécédents de 3.

ⓑ x antécédent de 3 par $f \iff f(x) = 3$

$\iff \dfrac{3-x^3}{1+x^2} = 3 \iff 3 - x^3 = 3(1+x^2)$

$\iff 3 - x^3 = 3 + 3x^2$

$\iff 3x^2 + x^3 = 0$

$\iff x^2(3+x) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = -3$

0 et -3 sont bien les antécédents de 3 par f

②

x	$-\infty$		$-1{,}2$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1{,}8$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

③ pour $x \geq 0$; $3 - f(x) = 3 - \dfrac{3-x^3}{1+x^2}$

$$= \frac{3+3x^2-3+x^3}{1+x^2} = \frac{x^2(3+x)}{1+x^2}$$

or pour $x \geq 0$; $x^2 \geq 0$; $3+x \geq 0$ et $1+x^2 > 0$

d'où par produit et quotient $3 - f(x) \geq 0$ donc $f(x) \leq 3$

de plus $f(0) = 3$

Finalement 3 est le maximum de f sur $\mathbb{R}_+$ atteint en 0.

④ ⓐ $k(x) = -x+1$

k est une fonction affine, sa représentation graphique C_k est une droite

x	0	3
$k(x)$	1	-2

ⓑ pour $x \in \mathbb{R}$, $-x+1+\dfrac{(x+1)(2-x)}{1+x^2} = \dfrac{(1-x)(1+x^2)+(x+1)(2-x)}{1+x^2}$

$$= \frac{1-x+x^2-x^3+2x-x^2+2-x}{1+x^2}$$

$$= \frac{-x^3+1}{1+x^2} = f(x)$$

donc l'égalité est vérifiée

ⓒ La position relative de C et C_k est donnée par le signe de $h(x) = f(x) - k(x)$.

$h(x) = f(x) - k(x) = f(x) - (-x+1) = \dfrac{(x+1)(2-x)}{1+x^2}$

Tableau de signes. (il est inutile de faire figurer $1+x^2$ car $1+x^2 \geq 1 > 0$)

x		-1		2	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

• pour $x \in]1,2[$, $h(x) > 0$ donc C au-dessus de

• pour $x \in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$

$h(x) < 0$ donc C en-dessous de C_k

ⓓ C et C_k se coupent en $M(x,y)$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = k(x)$ (et $y = k(x)$)

$\Leftrightarrow$ $x = -1$ ou $x = 2$ d'après le tableau du (

et donc les points d'intersection sont $M(-1, k(-1))$; $N(2, k(2))$

c'est-à-dire $M(-1, 2)$; $N(2, -1)$.