DS 11

30 avril 2…

I ① h est une fonction affine. D est une droite. Tableau de valeurs :

x	0	3
y	2	-1

② pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - h(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x - 4 - (-x+2)$

$= -x^3 + 2x^2 + 5x - 6.$

et $(x-3)(x+2)(1-x) = (x^2 - 3x + 2x - 6)(1-x)$

$= (x^2 - x - 6)(1-x)$

$= x^2 - x - 6 - x^3 + x^2 + 6x$

$= -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$ d'où $f(x) - h(x) = (x-3)(x+2)(1-x)$

③ La position relative de $\mathcal{C}$ et D est donnée par le signe de la différence f…

Tableau de signes.

x		-2		1		3	
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)-h(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

On déduit alors que

sur $]-\infty ; -2] \cup [1, 3]$, $f(x) \geq h(x)$ donc $\mathcal{C}$ au dessus…

sur $[-2, 1] \cup [3, +\infty[$, $f(x) \leq h(x)$ donc $\mathcal{C}$ en dessous…

④ $M(x, y) \in \mathcal{C} \cap D \iff f(x) = h(x) \iff f(x) - h(x) = 0$

$\iff x \in \{-2, 1, 3\}$ d'après ②

Les points d'intersections sont donc $M_1(-2, h(-2))$; $M_2(1, h(1))$; $M_3(3, h(3))$

c'est-à-dire $M_1(-2 ; 4)$, $M_2(1, 1)$, $M_3(3, -1)$.

II ① Sur $[2 ; +\infty[$

2	$\leq$	a	$\leq$	b	Justification
0	$\geq$	$4-2a$	$\geq$	$4-2b$	Car $x \mapsto 4-2x$ ↘ sur $\mathbb{R}$
0	$\leq$	$(4-2a)^2$	$\leq$	$(4-2b)^2$	Car $x \mapsto x^2$ ↘ sur $\mathbb{R}_-$
3	$\leq$	$3+2(4-2a)^2$	$\leq$	$3+2(4-2b)^2$	Car $x \mapsto 3+2x$ ↗ sur $\mathbb{R}$
$\frac{1}{3}$	$\geq$	$f(a)$	$\geq$	$f(b)$	Car $x \mapsto \frac{1}{x}$ ↘ sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc f est croissante sur $[2, +\infty[$

②

a	$\leq$	b	$\leq$	2	Justification
$4-2a$	$\geq$	$4-2b$	$\geq$	0	Car $x \mapsto 4-2x$ ↘ sur $\mathbb{R}$
$(4-2a)^2$	$\geq$	$(4-2b)^2$	$\geq$	0	Car $x \mapsto x^2$ ↗ sur $\mathbb{R}_+$
$3+2(4-2a)^2$	$\geq$	$3+2(4-2b)^2$	$\geq$	3	Car $x \mapsto 3+2x$ ↗ sur $\mathbb{R}$
$f(a)$	$\leq$	$f(b)$	$\leq$	$\frac{1}{3}$	Car $x \mapsto \frac{1}{x}$ ↘ sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc f décroissante sur $]-\infty ; 2]$

③ ⓐ On a donc

x		2	
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$

ⓑ On deduit d'après le tableau de variations de f que $\frac{1}{3}$ maximum de f sur $\mathbb{R}$ atteint en $x = 2$.

④ On remarque que $A = f(2{,}127)$ et $B = f(2{,}138)$

or $2 < 2{,}127 < 2{,}138$

donc $f(2) > f(2{,}127) > f(2{,}138)$ car f décroissante sur $[2, +\infty[$

d'où $A > B$.

III ① ⓐ l'aire d'un disque de diamètre d est $\mathcal{A} = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}$

ⓑ $\mathcal{B} = \frac{1}{2}\left(\pi \times \frac{6^2}{4}\right) = \frac{9\pi}{2}$

② $\mathcal{A}(x) = \text{Aire}(C_1) + \text{Aire}(C_2)$

$$= \frac{1}{2}\pi\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\pi\frac{(6-x)^2}{4} = \frac{\pi}{8}\left(x^2 + (6-x)^2\right) = \frac{\pi}{8}\left(x^2 + 36 - 12x + x^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(2x^2 - 12x + 36\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(x^2 - 6x + 18\right)$$

③ $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\mathcal{B} \iff \frac{\pi}{4}(x^2 - 6x + 18) = \frac{9\pi}{4}$

$\iff x^2 - 6x + 18 = 9 \iff x^2 - 6x + 9 = 0 \iff (x-3)^2 = 0$

$\iff x = 3$.

$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\mathcal{B}$ pour $x = 3$.

④ ⓐ $(x-3)^2 - 3 = x^2 - 6x + 9 - 3$

$= x^2 - 6x + 6$ donc l'égalité est vraie.

ⓑ $\mathcal{A}(x) = \frac{2}{3}\mathcal{B} \iff \frac{\pi}{4}(x^2 - 6x + 18) = \frac{2}{3} \times \frac{9\pi}{2}$

$\iff \frac{\pi}{4}(x^2 - 6x + 18) = 3\pi \iff x^2 - 6x + 18 = 12$

$\iff x^2 - 6x + 6 = 0$

ⓒ $(E) \iff x^2 - 6x + 6 = 0$

$\iff (x-3)^2 - 3 = 0$ d'après ⓐ

$\iff (x-3)^2 = 3$

$\iff x - 3 = \sqrt{3}$ ou $x - 3 = -\sqrt{3}$

$\iff x = 3 + \sqrt{3}$ ou $x = 3 - \sqrt{3}$

Donc les solut° de (E) sont $S = \{3+\sqrt{3} ; 3-\sqrt{3}\}$.

IV $\frac{93\pi}{4} = 23\pi + \frac{\pi}{4}$

$= 22\pi + \pi + \frac{\pi}{4}$

$= 11 \times 2\pi + \frac{5\pi}{4}$