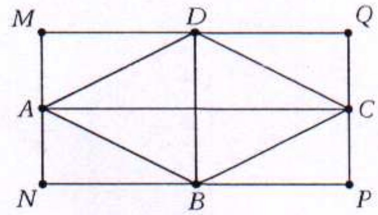
Classe de seconde 3 *24 mars 2011*

Mathématiques N^o 14 (1h)

Exercice 0 : Veuillez écrire votre nom :

Exercice 1 (3 points) :
On considère le rectangle $MNPQ$ ci-contre. On désigne par A,B,C,D les milieux respectifs de $[MN]$, $[NQ]$, $[PQ]$, $[QM]$. Compléter les égalités suivantes en utilisant les points de la figure.

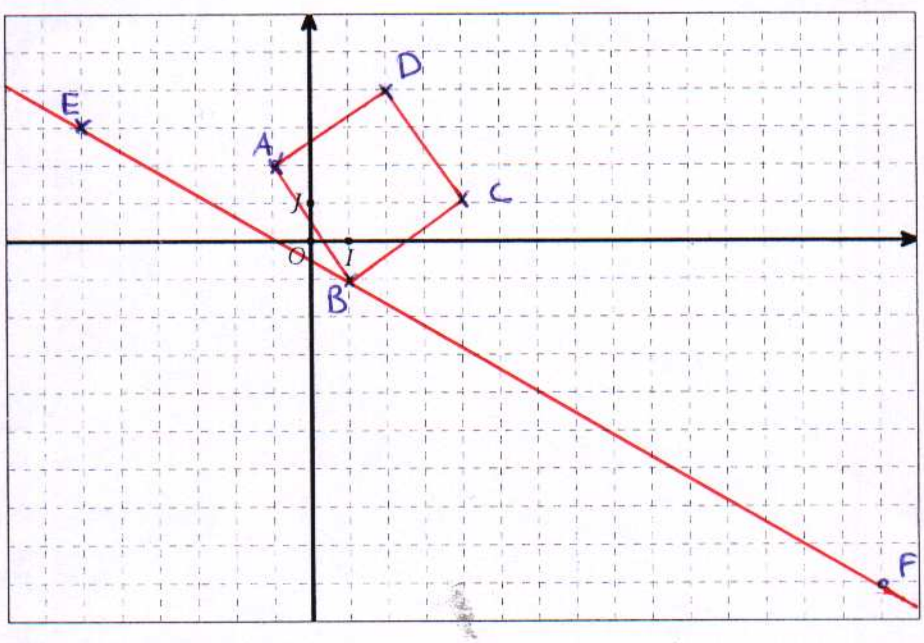


1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =$ $\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} =$ $\overrightarrow{MP}$
3. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} =$ $\overrightarrow{0}$
4. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DC} =$ $\overrightarrow{MB}$
5. $\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BA} =$ $\overrightarrow{DM}$
6. $2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{CD} =$ $\overrightarrow{AD}$

Exercice 2 (3 points) : Soit $A(-1;-2)$, $B(3;-4)$. Par la méthode de votre choix, déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

Exercice 3 (10 points) : Soit $(O; I; J)$ un repère orthonormé du plan. $A(-1;2)$, $B(1;-1)$, et $C(4;1)$. On complétera la figure ci-dessous au cours de l'exercice.

1. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
3. Déterminer les coordonnées de E symétrique de C par rapport à A.
4. Déterminer les coordonnées de F vérifiant $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}$.
5. Les points E,B,F sont-ils alignés ?



Exercice 4 (4 points) : Soit $(O; I; J)$ un repère orthonormé du plan. Soit $A(-1;2)$, $B(3;4)$.

1. Montrer que ABO est un triangle rectangle.
2. Déterminer les coordonnées de C, centre du cercle circonscrit à ABO noté $\mathscr{C}$.
3. Soit $P(4;3)$, P est-il un point de $\mathscr{C}$?

DS 14 (1h)

II $A(-1,-2)$; $B(3,-4)$.

$M(x,y) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\iff XY' - X'Y = 0$$

$$\iff (x+1)(-2) - 4(y+2) = 0$$

$$\iff -2x - 2 - 4y - 8 = 0$$

$$\iff -2x - 4y - 10 = 0 \iff 4y = -2x - 10$$

$$\iff y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}.$$

$(AB) : y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

III ① ABCD parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Soit $D(x,y)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 4-x \\ 1-y \end{pmatrix}$.

d'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\iff \begin{cases} 4-x = 2 \\ 1-y = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \iff D(2,4).$$

② $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

donc
$$\left.\begin{aligned} AB^2 &= 4+9 = 13 \\ BC^2 &= 13 \\ AC^2 &= 25+1 = 26 \end{aligned}\right\} \implies AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Donc d'après le théorème de Pythagore ABC rectangle en B.

de plus $AB = BC = \sqrt{13}$

donc ABCD est un parallélogramme avec deux cotés consécutifs de même longueur et un angle droit donc ABCD est un carré.

③ $E(x;y)$ est symétrique de C par rapport à A

$\iff \vec{CE} = 2\vec{CA}$.

et $\vec{CE}\begin{pmatrix}x-4\\y-1\end{pmatrix}$; $\vec{CA}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$

d'où $\vec{CE} = 2\vec{CA} \iff \begin{cases} x-4 = -10 \\ y-1 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \end{cases}$ donc $E(-6;3$

④ Soit $F(x;y)$

$\vec{AF}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

$\vec{AF} = 2\vec{AC} + 3\vec{AB} \iff \begin{cases} x+1 = 10+6 \\ y-2 = -2-9 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 15 \\ y = -9 \end{cases}$ donc $F(15,$

⑤ $\vec{EB}\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$ $\vec{EF}\begin{pmatrix}21\\-12\end{pmatrix}$

$XY' - X'Y = 7(-12) + 4\times 21 = -84+84 = 0$

Donc $\vec{EB}$ et $\vec{EF}$ colinéaires d'où E, B, F alignés.

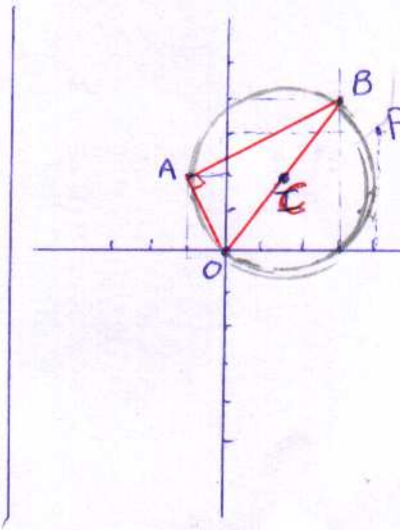
IV ① $\vec{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ $\vec{OA}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{OB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

donc $\left.\begin{array}{l} AB^2 = 16+4 = 20 \\ OA^2 = 5 \\ OB^2 = 9+16 = 25 \end{array}\right\} \Longrightarrow OB^2 = OA^2 + AB^2 \Longrightarrow$ OAB rectangle en

② le centre du cercle circonscrit à ABO est le milieu de l'hypothénuse $[OB]$

d'où $x_C = \dfrac{x_B + x_O}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $y_C = \dfrac{y_B + y_O}{2} = 2$

Donc $C\left(\dfrac{3}{2};2\right)$



③ Calculons la longueur CP.

$\vec{CP}\begin{pmatrix}5/2\\1\end{pmatrix}$ donc $CP^2 = \dfrac{25}{4} + 1 = \dfrac{29}{4}$

Calculons le rayon du cercle $\mathcal{C}$: $R = OC$

et $\vec{OC}\begin{pmatrix}3/2\\2\end{pmatrix} \Longrightarrow OC^2 = \dfrac{9}{4} + 4 = \dfrac{25}{4}$. Donc $CP \neq R \Longrightarrow P \notin \mathcal{C}$.