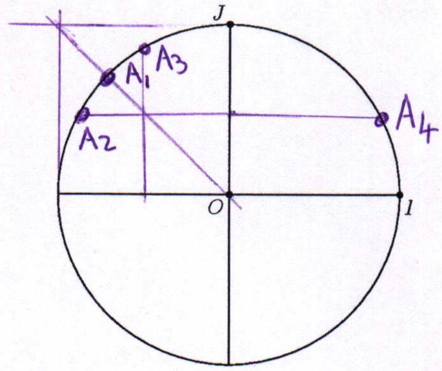
Mathématiques N^o 17 (1h)

Exercice 0 : Veuillez écrire votre nom :

Exercice 1 (4 points) :

1. Sur le cercle trigonométrique ci-joint, placer les points A_i tels que



$$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_1}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_2}) = \frac{-7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_3}) = \frac{14\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_4}) = \frac{13\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

2. Compléter : $\cos(\frac{-7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2 (2 points) : Soit $x \in [\frac{\pi}{2};\pi]$ tel que $\sin x = \frac{3}{5}$; déterminer alors $\cos x$.

Exercice 3 (2 points) : Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0;2\pi]$

2. $\cos x < \frac{1}{2}$ dans $[-\pi;\pi]$.

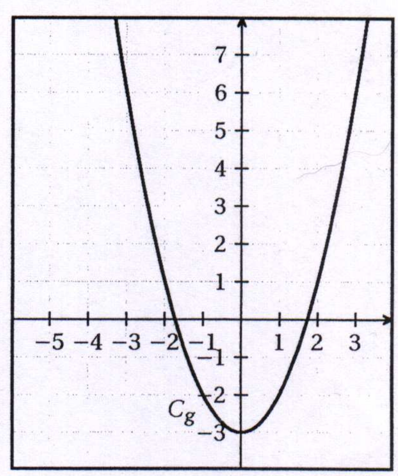
Exercice 4 (3,5 points) : Une urne contient quatre jetons portant le numéro 4, trois jetons portant le numéro 3, deux jetons portant le numéro 2 et un jeton avec le numéro 1.
On tire au hasard un jeton de l'urne et on note son numéro.

1. Quel est l'univers Ω des issues possibles ?
2. Définir une loi de probabilité modélisant cette expérience aléatoire.
3. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   a) A :« le jeton porte un numéro pair ».
   b) B :« le jeton porte un numéro supérieur ou égal à trois ».
   c) $A \cap B$
   d) $A \cup B$

Exercice 5 (5,5 points) : Une urne contient 60 boules numérotée de 1 à 60. On tire une boule au hasard et on lit le numéro. On considère les événements :

- A :« Le numéro est un multiple de 10 ».
- B :« Le numéro est un multiple de 3 ».
- C :« Le numéro est un multiple de 4 ».

1. Quel est l'univers de cette expérience ?
2. Déterminer la probabilité de A.
3. Déterminer la probabilité de B.
4. Déterminer la probabilité de C.
5. Soit D :« Le numéro est un multiple de 12 ». Déterminer $P(D)$.
6. Soit E :« Le numéro est un multiple de 3 ou de 4 ».
   Déduire de la question précédente $P(E)$.



Exercice 6 (3 points) :
On définit pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$ et $g(x) = x^2 - 3$ (voir ci-contre).

1. Quelle est la nature de f et g ? Représenter C_f.
2. Démontrer que $f(x) - g(x) = (x+2)(3-x)$.
3. Quelle est la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?

19 mai 20

DS 17 (1h)

I voir feuille.

II $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

d'où $\cos x = \sqrt{\frac{16}{25}}$ ou $\cos x = -\sqrt{\frac{16}{25}}$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{4}{5}$ ou $\cos x = -\frac{4}{5}$

or pour $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\cos x < 0$ donc $\cos x = -\frac{4}{5}$.

III $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $S = \left\{ \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$

$\cos x < \frac{1}{2}$

$S = \left[-\pi ; -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$

IV ① $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

② La loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

$X = x_i$	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Il y a 10 jetons dans l'urne : 1 numéro 1
2 —— 2
3 —— 3
4 —— 4

③ ⓐ $A = \{2, 4\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

ⓑ $B = \{3, 4\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{7}{10}$.

ⓒ $A \cap B = \{4\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{5}$

ⓓ $A \cup B = \{2, 3, 4\} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{9}{10}$.

(V) ① $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\dots 60\}$

② $A = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$

On est en situation d'équiprobabilité $\Rightarrow P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$.

③ $B = \{3, 3\times 2, 3\times 3, \dots\dots 3\times 10, \dots\dots \underbrace{3\times 20}_{=60}\}$

donc $P(B) = \frac{\# B}{\# \Omega} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$

④ $C = \{4, 4\times 2, \dots\dots 4\times 10, \dots \underbrace{4\times 15}_{=60}\} \Rightarrow P(C) = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$

⑤ $D = \{12, 24, 36, 48, 60\} \Rightarrow P(D) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$

⑥ $E = B \cup C \Rightarrow P(E) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

et $B \cap C$ "multiple de 3 et 4" $\Rightarrow B \cap C = D$

donc $P(E) = P(B) + P(C) - P(D)$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

(VI) ① $f(x) = x+3$; $g(x) = x^2 - 3$ donc f affine et g polynôme de degré 2

② pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = x + 3 - (x^2 - 3)$

$= x + 3 - x^2 + 3$

$= -x^2 + x + 6$

et d'autre part $(x+2)(3-x) = 3x - x^2 + 6 - 2x$

$= -x^2 + x + 6$

donc on a bien $f(x) - g(x) = (x+2)(3-x)$

③ La position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est donnée par le signe de $h(x) = f(x) - g(x)$

Tableau de signes:

x		-2		3	
$(x+2)$	$-$	0	$+$		$+$
$3-x$	$+$		$+$	0	$-$
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc pour $x \in]-2; 3[$ $\mathcal{C}_f$ au-dessus de $\mathcal{C}_g$

pour $x \in]-\infty; -2[\cup]3, +\infty[$ $\mathcal{C}_f$ en dessous de $\mathcal{C}_g$