Devoir Mathématiques N^o 7 (1 h)

Exercice 0 : Nom et prénom :

Exercice 1 (2,5 points) :

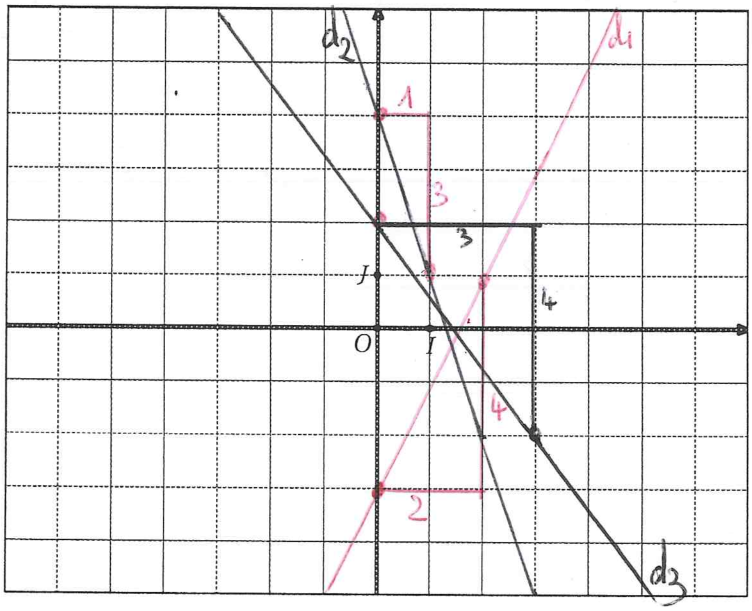
1. Dans le repère ci-joint, tracer les droites dont l'équation est donnée ci-dessous.

   $d_1 : y = 2x - 3.$

   $d_2 : y = -3x + 4$

   $d_3 : y = -\frac{4}{3}x + 2$

2. Le point $A(5; 8)$ est-il un point de d_1 ?
3. Le point $B(-4; 16)$ est-il un point de d_2 ?

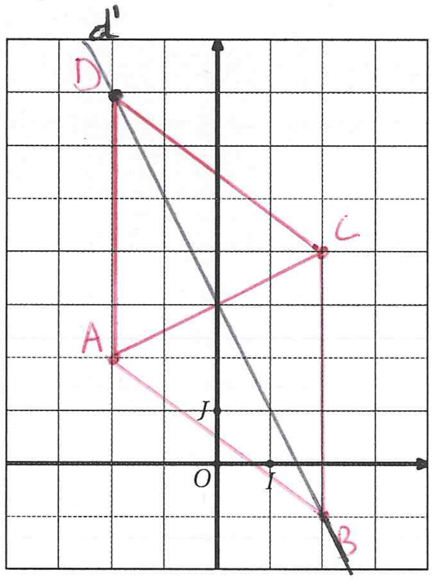


Exercice 2 (1,5 points) : Réduire au même dénominateur l'expression suivante :

$$A(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{3-x}{x+2}$$

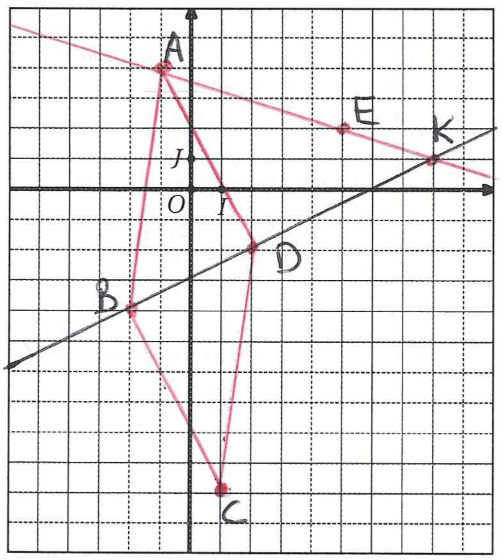
Exercice 3 (8 points) :
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; I, J)$. On considère les points $A(-2;2)$, $B(2;-1)$ et $C(2;4)$.

1. Démontrer que $BC = BA$.
2. Déterminer l'équation réduite de chacune des droites (AB), (AC) et (BC).
3. Déterminer l'équation de la droite d passant par C et parallèle à (AB).
4. Soit d' la droite passant par B et perpendiculaire à (AC).
   a) Que représente d' pour le triangle ABC.
   b) Déterminer l'équation réduite de la droite d'.
5. Vérifier que $D(-2;7)$ est le point d'intersection de d et d'.
6. Quelle est la nature de $ABCD$? Justifier.



Exercice 4 (8 points) : Dans un repère orthonormal $(O; I, J)$ on considère les points $A(-1\ ;\ 4)$, $B(-2\ ;\ -4)$, $D(2\ ;\ -2)$ et $E(5\ ;\ 2)$.

1. Calculer les coordonnées de C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Calculer les coordonnées de K tel que $\overrightarrow{KA} = 3\overrightarrow{KE}$.
3. Démontrer que B, D et K sont alignés.
4. Calculer AB, AD et BD.
5. Quelle est la nature du triangle ABD ? Justifier.
6. Calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$.



DS n° 7

I ① Voir graphique et construct°. On pourrait également faire avec un tableau de valeur pour chaque droite.

Par exemple pour d_1 :

x	0	4
y	-3	5

② $2x_A - 3 = 2\times 5 - 3 = 7 \neq y_A \Longrightarrow A(5;8) \notin d_1$

③ $-3x_B + 2 = (-3)\times(-4) + 4 = 16 = y_B \Longrightarrow B(-4;16) \in d_2$

II $A(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3-x}{x+2}$

$= \dfrac{x+2-(3-x)(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{x+2-3x+3+x^2-x}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{x^2-3x+5}{(x-1)(x+2)}$

III $A(-2;2)$; $B(2;-1)$; $C(2;4)$

① $\vec{BC}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$; $\vec{BA}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ donc $BC^2 = 25$ et $BA^2 = 16+9 = 25$

$\Longrightarrow BC = BA$

② ★ $x_A \neq x_B \Longrightarrow (AB) : y = mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$

on a $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\dfrac{3}{4}$ d'où $y = -\frac{3}{4}x + p$

de plus $A(-2,2) \in (AB) \Longleftrightarrow 2 = -\frac{3}{4}(-2) + p$

$\Longleftrightarrow p = 2 - \dfrac{3\times 2}{4}$

$= 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$ donc $(AB) : y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

★ $M(x;y) \in (AC) \Longleftrightarrow \vec{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-2\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Longleftrightarrow XY' - X'Y = 0$

$\Longleftrightarrow (x+2)\times 2 - 4(y-2) = 0$

$\Longleftrightarrow 2x + 4 - 4y + 8 = 0$

$\Longleftrightarrow 4y = 2x + 12$

$\Longleftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 3$ d'où $(AC) : y = \frac{1}{2}x + 3$

* $x_B = x_C = 2$ d'où $(BC) : x = 2$.

③ $d // (AB) \Rightarrow$ d et (AB) ont même coefficient directeur

$\Rightarrow d : y = -\frac{3}{4}x + p$

et $C(2;4) \in d$ d'où $4 = -\frac{3}{4} \times 2 + p$

$\Rightarrow p = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$ d'où $d : y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$

④ ⓐ le triangle ABC est isocèle en B d'après ① donc la médiatrice, la hauteur issue de B et la médiane issue de B sont confondues.

d'où d' est la médiatrice de [AC] ainsi que la hauteur et la médiane issue d

ⓑ $M(x;y) \in d'$ médiatrice de $[AC] \iff$

$\iff AM = CM$

$\iff AM^2 = CM^2$ or $\vec{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-2 \end{pmatrix}$; $\vec{CM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \end{pmatrix}$

$\iff (x+2)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2$

$\iff x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16$

$\iff 8x - 12 + 4y = 0$

$\iff y = -2x + 3$ d'où $d' : y = -2x + 3$

⑤ $-2x_D + 3 = (-2)\times(-2) + 3 = 7 = y_D \Rightarrow D \in d'$

$-\frac{3}{4}x_D + \frac{11}{2} = -\frac{3}{4}(-2) + \frac{11}{2} = \frac{3}{2} + \frac{11}{2} = 7 = y_D \Rightarrow D \in d.$

De plus d et d' non parallèles donc d est l'unique point d'intersect° de d et d'

⑥ $\vec{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{DC}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ on a $\vec{AB} = \vec{DC}$ donc ABCD parallélogramme

de plus les diagonales se coupent perpendiculairement car $d' \perp (AC)$

donc ABCD est un losange.

(IV) ① Soit $C(x,y)$.

ABCD parallélogramme $\iff \vec{AB} = \vec{DC}$ or $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}$ $\vec{DC}\begin{pmatrix}x-2\\y+2\end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x-2=-1 \\ y+2=-8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=1 \\ y=-10. \end{cases}$$ d'où $C(1;-10)$

② Soit $K(x;y)$

$\vec{KA}\begin{pmatrix}-1-x\\4-y\end{pmatrix}$; $\vec{KE}\begin{pmatrix}5-x\\2-y\end{pmatrix}$

d'où $\vec{KA} = 3\vec{KE} \iff \begin{cases} -1-x = 3(5-x) \\ 4-y = 3(2-y) \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} -1-x = 15-3x \\ 4-y = 6-3y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x=16 \\ 2y=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=8 \\ y=1 \end{cases}$$

d'où $K(8;1)$

③ $\vec{BD}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$; $\vec{BK}\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}$.

$XY'-X'Y = 20-20 = 0$ donc $\vec{BD}, \vec{BK}$ colinéaires

$\implies$ B, D, K alignés

④ $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}$; $\vec{AD}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$; $\vec{BD}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

d'où $AB^2 = 65$; $AD^2 = 9+36 = 45$; $BD^2 = 16+4 = 20$

⑤ On déduit $AB^2 = AD^2 + BD^2$ donc ABD rectangle en D.

⑥ ABCD parallélogramme et donc sa diagonale (BD) est axe de symétrie

d'où $\mathcal{A}(ABCD) = 2 \times \mathcal{A}(ABD)$ et ABD rectangle en D $\implies \mathcal{A}(ABD) = \dfrac{DA \times BD}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{45} \times \sqrt{20}}{2}$

d'où $\mathcal{A}(ABCD) = \sqrt{45} \times \sqrt{20} = 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 30.$