Devoir Mathématiques N^o 3

L'usage de la calculatrice est interdit

Exercice 0 : Nom et prénom : Hester

Exercice 1 (4 points) :
Résoudre les équations suivantes :

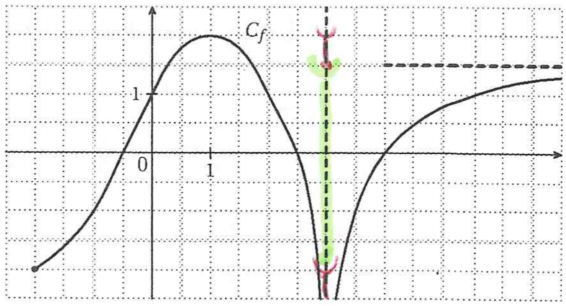
(E_1) : $(2x+3)(3x-5) = (7-3x)(2x+3)$
(E_2) : $(x-4)^2 = 9$
(E_3) : $4x^2 - 8x + 1 = 0$

Exercice 2 (1,5 point) :
On considère l'équation :

$$(E) : x^2 - 2x - 4 = 0$$

Sans chercher à la résoudre, vérifier que le nombre $1 + \sqrt{5}$ est solution de (E).

Exercice 3 (3 points) :
On considère la fonction f donnée par la courbe de la figure ci-contre. Soit m un réel. Déterminer, selon les valeurs du paramètre m, le nombre d'antécédents de m par f.

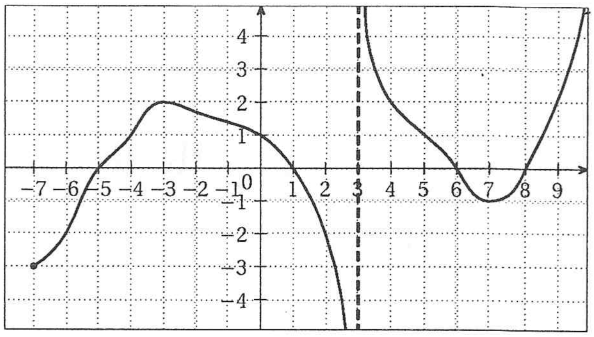


Exercice 4 (9 points) :
On considère les fonctions suivantes :
$f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = \dfrac{2x-7}{3x+5}$, $h(x) = -4 + \sqrt{6-2x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces quatre fonctions.
2. a) Calculer les images par f de 3, de -4.
   b) Déterminer les antécédents éventuels de -4 par f.
   c) Déterminer les antécédents éventuels de -3 par f.
3. a) Calculer les images par g de 2, de -4.
   b) Déterminer les antécédents éventuels de 2 par g.
   c) Déterminer les antécédents éventuels de $\dfrac{2}{3}$ par g.
4. a) Calculer les images par h de 1, de -5.
   b) Déterminer les antécédents éventuels de 4 par h.
   c) Déterminer les antécédents éventuels de -5 par h.

Exercice 5 (7 points) :
La courbe représentative d'une fonction f est donnée ci-contre :
Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par la figure.

1. a) Donner l'ensemble de définition de f.
   b) Déterminer les images de 2 et 6 par f.
   c) Déterminer les antécédents éventuels de -2 par f.
2. a) Résoudre, en expliquant la démarche, l'équation (E) : $f(x) = 2$.
   b) Résoudre l'inéquation (I) : $f(x) \leqslant 1$.



Exercice 6 (5 points) : Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible *Vous completerez directement sur la feuille)* :

$a = \frac{3}{20} + \frac{5}{4} + \frac{3}{5} = \frac{1}{20}(3+25+12) = \frac{40}{20} = 2$

$b = \frac{1}{6} + \frac{3}{18} - \frac{3}{9} = \frac{1}{18}(3+3-6) = 0$

$c = \frac{15}{8} - (\frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = \frac{15}{8} - \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

$d = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times 3 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$e = \frac{14}{5} \times \frac{10}{7} + \frac{5}{3} = 2 \times 2 + \frac{5}{3} = \frac{17}{3}$

$f = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{48}_{3}} \times \frac{\cancel{16}}{\cancel{15}_{5}} = \frac{3}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

$g = \frac{4}{5} \times \frac{15}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{\cancel{4} \times \cancel{5} \times \cancel{3}}{\cancel{5} \times 2 \times \cancel{4} \times \cancel{3}} = \frac{1}{2}$

$h = \frac{4}{5} \times (4 - \frac{3}{2}) = \frac{4}{5} \times \frac{5}{2} = 2$

$i = \frac{24}{5} \times (\frac{5}{3} - \frac{5}{6}) = \frac{24}{5} \times \frac{5}{6} = 4$

$j = \frac{(\frac{11}{14} + \frac{2}{7})}{\frac{20}{21}} = \frac{\frac{15}{14}}{\frac{20}{21}} = \frac{15}{14} \times \frac{21}{20} = \frac{\cancel{5} \times 3 \times \cancel{7} \times 3}{2 \times \cancel{7} \times \cancel{5} \times 4} = \frac{9}{8}$

DS 3. 4 oct 2012

I (E_1) $(2x+3)(3x-5)=(7-3x)(2x+3)$

$\iff (2x+3)[(3x-5)-(7-3x)]=0$

$\iff (2x+3)(6x-12)=0$

d'où $\boxed{S=\left\{-\frac{3}{2}\,;\,2\right\}}$.

$(E_2) \iff (x-4)^2=9$

$\iff x-4=3$ ou $x-4=-3$

$\iff x=7$ ou $x=1$ $\boxed{S=\{7;1\}}$

$(E_3) \iff 4x^2-4x+1=0$

$\iff (2x)^2-2\times 2x+1=0 \iff (2x-1)^2=0$ $\boxed{S=\left\{\frac{1}{2}\right\}}$.

II pour $x=1+\sqrt{5}$ on a

$$x^2-2x-4=(1+\sqrt{5})^2-2(1+\sqrt{5})-4$$
$$=1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5}-4$$
$$=0$$

donc $1+\sqrt{5}$ est solut° de l'équation

III Par lecture sur le graphique on a (voir figure)

- pour $m\in]2;+\infty[$, m n'a pas d'antécédent
- pour $m=2$, m a un seul antécédent
- pour $m\in[\frac{3}{2};2[\cup]-\infty;-2[$, m a 2 antécédents
- pour $m\in[-2;\frac{3}{2}[$ m a 3 antécédents.

IV ① On a $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

pour g : $3x+5=0 \iff x = -\frac{5}{3}$ d'où $\boxed{D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}\}}$

pour h : il faut $6-2x \geq 0$

$\iff 2x \leq 6 \iff x \leq 3$

d'où $\boxed{D_h =]-\infty ; 3]}$

② ⓐ $f(3) = 12$; $f(-4) = 16-8-3 = 5$

ⓑ $f(x) = -4 \iff x^2+2x-3 = -4$

$\iff x^2+2x+1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0$

$\iff x = -1$

ⓒ $f(x) = -3 \iff x^2+2x-3 = -3$

$\iff x^2+2x = 0$

$\iff x(x+2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$

③ ⓐ $g(2) = \frac{4-7}{6+5} = -\frac{3}{11}$; $g(-4) = \frac{-8-7}{-12+5} = \frac{15}{7}$

ⓑ $g(x) = 2 \iff \frac{2x-7}{3x+5} = 2$

$\iff 2x-7 = 2(3x+5)$

$\iff 2x-7 = 6x+10$

$\iff 4x = -17 \iff \boxed{x = -\frac{17}{4}}$

c) $g(x) = \frac{2}{3}$

$\iff \frac{2x-7}{3x+5} = \frac{2}{3}$

$\iff (2x-7)\times 3 = 2(3x+5)$

$\iff 6x-21 = 6x+10 \iff 31=0$ impossible.

$\frac{2}{3}$ n'a pas d'antécédent par g.

4) a) $h(1) = -4 + \sqrt{6-2}$
$= -4+2$
$= -2$

$h(-5) = -4 + \sqrt{6+10} = 0.$

b) $h(x) = 4 \iff -4 + \sqrt{6-2x} = 4$

$\iff \sqrt{6-2x} = 8$

$\iff (\sqrt{6-2x})^2 = 8^2$

$\iff 6-2x = 64 \iff 2x = -58$

$\iff x = -29$

c) $h(x) = -5 \iff -4 + \sqrt{6-2x} = -5$

$\iff \sqrt{6-2x} = -1$ impossible car une racine doit être positive.

-5 n'a pas d'antécédent par h.

V

1) a) On lit $D_f = [-7;3[\cup]3;+\infty[$

b) $f(2) = -2$; $f(6) = 0$

c) -2 a pour antécédents $x = -6$ ou $x = 2$

2) a) Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = 2$.

On lit $S = \{-3 ; 4 ; 9\}$

b) On lit que les solutions de $f(x) \leq 1$ sont

$S = [-7;-4] \cup [0;3[\cup [5;8,5]$