

Devoir Mathématiques N° 3

L'usage de la calculatrice est interdit

Exercice 0 : Nom et prénom : *Hester*

Exercice 1 (4 points) :

Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1) : (2x + 3)(3x - 5) = (7 - 3x)(2x + 3)$$

$$(E_2) : (x - 4)^2 = 9$$

$$(E_3) : 4x^2 - 8x + 1 = 0$$

Exercice 2 (1,5 point) :

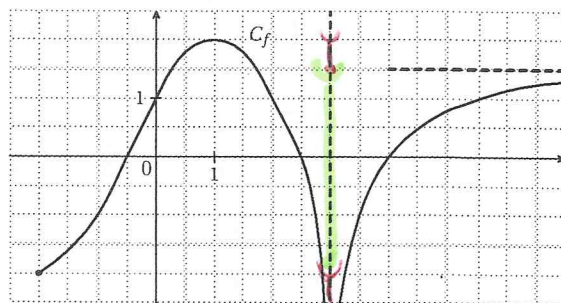
On considère l'équation :

$$(E) : x^2 - 2x - 4 = 0$$

Sans chercher à la résoudre, vérifier que le nombre $1 + \sqrt{5}$ est solution de (E) .

Exercice 3 (3 points) :

On considère la fonction f donnée par la courbe de la figure ci-contre. Soit m un réel. Déterminer, selon les valeurs du paramètre m , le nombre d'antécédents de m par f .



Exercice 4 (9 points) :

On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 + 2x - 3, \quad g(x) = \frac{2x - 7}{3x + 5}, \quad h(x) = -4 + \sqrt{6 - 2x}.$$

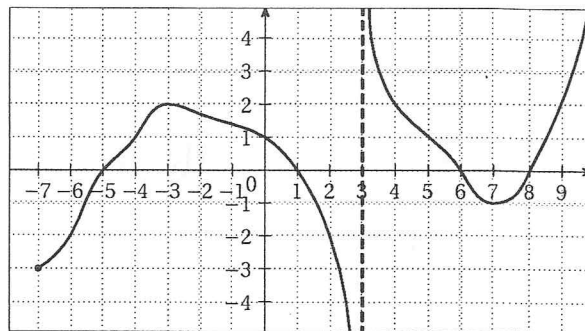
1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces quatre fonctions.
2. a) Calculer les images par f de 3, de -4 .
 b) Déterminer les antécédents éventuels de -4 par f .
 c) Déterminer les antécédents éventuels de -3 par f .
3. a) Calculer les images par g de 2, de -4 .
 b) Déterminer les antécédents éventuels de 2 par g .
 c) Déterminer les antécédents éventuels de $\frac{2}{3}$ par g .
4. a) Calculer les images par h de 1, de -5 .
 b) Déterminer les antécédents éventuels de 4 par h .
 c) Déterminer les antécédents éventuels de -5 par h .

Exercice 5 (7 points) :

La courbe représentative d'une fonction f est donnée ci-contre :

Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par la figure.

1. a) Donner l'ensemble de définition de f .
- b) Déterminer les images de 2 et 6 par f .
- c) Déterminer les antécédents éventuels de -2 par f .
2. a) Résoudre, en expliquant la démarche, l'équation (E) : $f(x) = 2$.
- b) Résoudre l'inéquation (I) : $f(x) \leq 1$.



Exercice 6 (5 points) : Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible (Vous complétez directement sur la feuille) :

$$a = \frac{3}{20} + \frac{5}{4} + \frac{3}{5} = \frac{1}{20} (3 + 25 + 12) = \frac{40}{20} = 2$$

$$b = \frac{1}{6} + \frac{3}{18} - \frac{3}{9} = \frac{1}{18} (3 + 3 - 6) = 0$$

$$c = \frac{15}{8} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{15}{8} - \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$d = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times 3 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$e = \frac{14}{5} \times \frac{10}{7} + \frac{5}{3} = 2 \times 2 + \frac{5}{3} = \frac{17}{3}$$

$$f = \frac{9^3}{48} \times \frac{16}{15} = \frac{3}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$g = \frac{4}{5} \times \frac{15}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{4 \times 5 \times 1}{5 \times 2 \times 4} = \frac{1}{2}$$

$$h = \frac{4}{5} \times \left(4 - \frac{3}{2}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{5}{2} = 2$$

$$i = \frac{24}{5} \times \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{6}\right) = \frac{24}{5} \times \frac{5}{6} = 4$$

$$j = \frac{\left(\frac{11}{14} + \frac{2}{7}\right)}{\frac{20}{21}} = \frac{\frac{15}{14}}{\frac{20}{21}} = \frac{15}{14} \times \frac{21}{20} = \frac{5 \times 3 \times 7 \times 3}{2 \times 7 \times 5 \times 4} = \frac{9}{8}$$

$$\textcircled{I} \text{ (F}_1\text{)} \quad (2x+3)(3x-5) = (7-3x)(2x+3)$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)[(3x-5)-(7-3x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)(6x-12) = 0$$

$$\text{D'où } S = \left\{ -\frac{3}{2}; 2 \right\}.$$

$$\text{(F}_2\text{)} \Leftrightarrow (x-4)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x-4 = 3 \quad \text{ou} \quad x-4 = -3$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

$$S = \{7; 1\}$$

$$\text{(F}_3\text{)} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x)^2 - 2 \times 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

$$\textcircled{II} \quad \text{pour } x = 1 + \sqrt{5} \text{ on a}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 4 &= (1 + \sqrt{5})^2 - 2(1 + \sqrt{5}) - 4 \\ &= 1 + 2\sqrt{5} + 5 - 2 - 2\sqrt{5} - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $1 + \sqrt{5}$ est solution de l'équation

\textcircled{III} Par lecture sur le graphique on a (voir figure)

- pour $m \in]2; +\infty[$, m n'a pas d'antécédent
- pour $m = 2$, m a un seul antécédent
- pour $m \in [\frac{3}{2}; 2[\cup]-\infty; -2[$, m a 2 antécédents
- pour $m \in [-2; 2[$, m a 3 antécédents.

④ ① On a $D_f = \mathbb{R}$

pour g: $3x+5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}$ d'où $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}\}$

pour h: il faut $6-2x \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 3$$

d'où $D_h =]-\infty; 3]$

② a) $f(3) = 12$; $f(-4) = 16 - 8 - 3 = 5$

b) $f(x) = -4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = -4$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

c) $f(x) = -3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = -3$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2$$

③ a) $g(2) = \frac{4-7}{6+5} = -\frac{3}{11}$; $g(-4) = \frac{8-7}{-4+5} = 1$

b) $g(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{2x-7}{3x+5} = 2$

$$\Leftrightarrow 2x - 7 = 2(3x + 5)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 7 = 6x + 10$$

$$\Leftrightarrow 4x = -17 \Leftrightarrow x = -\frac{17}{4}$$

$$\textcircled{c} \quad g(x) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-7}{3x+5} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow (2x-7) \times 3 = 2(3x+5)$$

$$\Leftrightarrow 6x-21 = 6x+10 \quad \Leftrightarrow 31=0 \text{ impossible.}$$

$\frac{2}{3}$ n'a pas d'antécédent par g .

$$\begin{aligned} \textcircled{4a} \quad h(1) &= -4 + \sqrt{6-2} \\ &= -4 + 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$h(-5) = -4 + \sqrt{6+10} = 0.$$

$$\textcircled{b} \quad h(x) = 4 \quad \Leftrightarrow -4 + \sqrt{6-2x} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6-2x} = 8$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{6-2x})^2 = 8^2$$

$$\Leftrightarrow 6-2x = 64 \quad \Leftrightarrow 2x = -58$$

$$\Leftrightarrow x = -29$$

$$\textcircled{c} \quad h(x) = -5 \quad \Leftrightarrow -4 + \sqrt{6-2x} = -5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6-2x} = -1 \quad \text{impossible car une racine doit \u00eatre positive.}$$

-5 n'a pas d'antécédent par h .

⑤ ① @ On lit $D_f = [-7; 3[\cup]3; +\infty[$

⑥ $f(2) = -2$; $f(6) = 0$

⑦ -2 a deux antécédents $x = -6$ ou $x = 2$

② @ Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe f et de la droite d'équation $y = 2$.

on lit $S = \{-3; 4; 9\}$

③ @ On lit que les solutions de $f(x) \leq 1$ sont

$$S = [-7; -4] \cup [1; 3[\cup [5; 8,5]$$