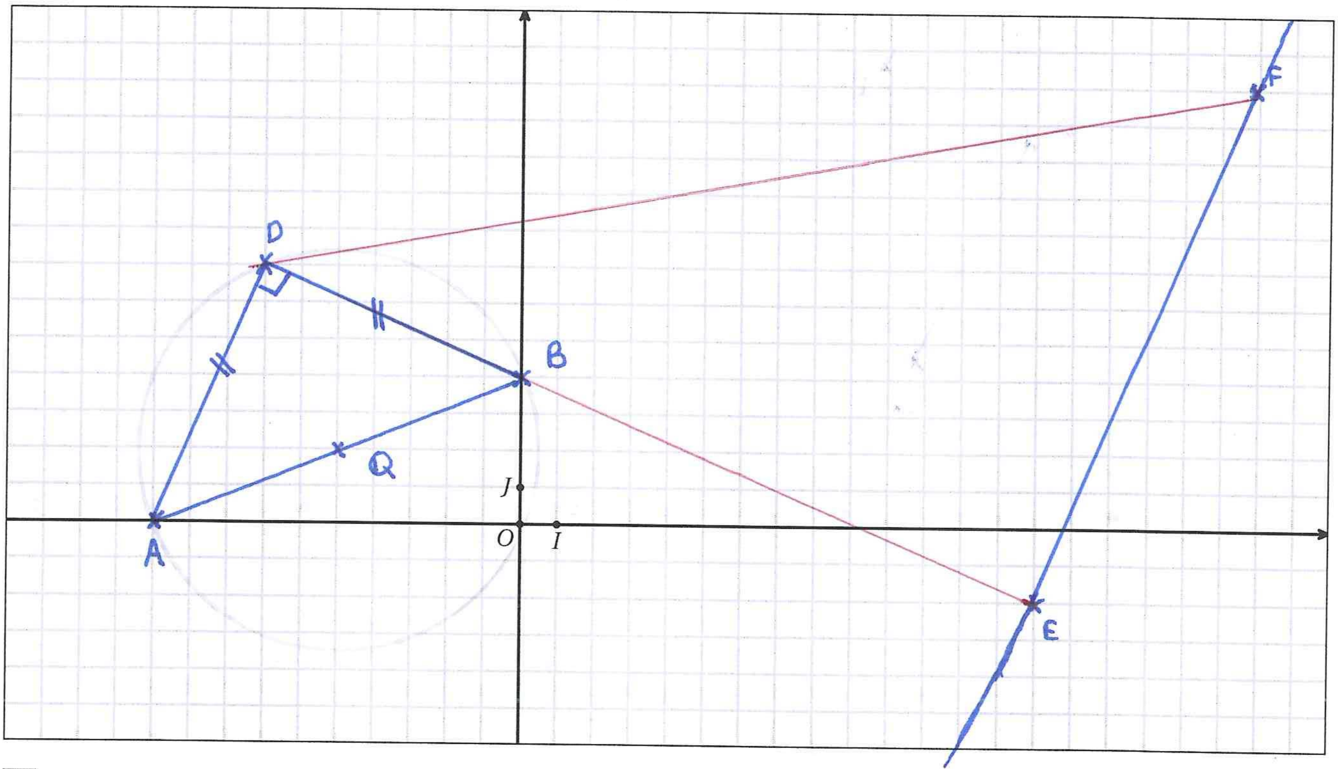
Devoir Mathématiques N^o 8 (1 heure)

0 Nom et prénom :

1 **(9 points)**
Soit $(O; I; J)$ un repère orthonormé du plan. $A(-10; 0)$, $B(0; 4)$. On complétera la figure ci-dessous au cours de l'exercice.

1. Déterminer les coordonnées de Q milieu de $[AB]$.
2. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Quel est son centre et son rayon ?
3. Soit $D(-7; 7)$. Vérifier que $D \in \mathscr{C}$.
4. Quelle est la nature du triangle ABD. Justifiez votre réponse.
5. Soient $E(14; -2)$ et $F(20; 12)$. Montrer que (EF) et (AD) sont parallèles.
6. Que pouvez-vous en déduire sur la nature du triangle DEF ?



2 **4 points**
Soit A, B, C et D quatre points du plan. Répondre par vrai ou faux aux propositions suivantes :

	Vrai	Faux
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même direction.	☒	☐
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même sens.	☐	☒
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même norme.	☒	☐
$\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{AB}$ ont même direction.	☒	☐
$\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{AB}$ ont même sens.	☒	☐
$\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{AB}$ ont même norme.	☐	☒
Si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ alors C est le milieu de $[AB]$.	☐	☒
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $ABCD$ est un parallélogramme.	☐	☒

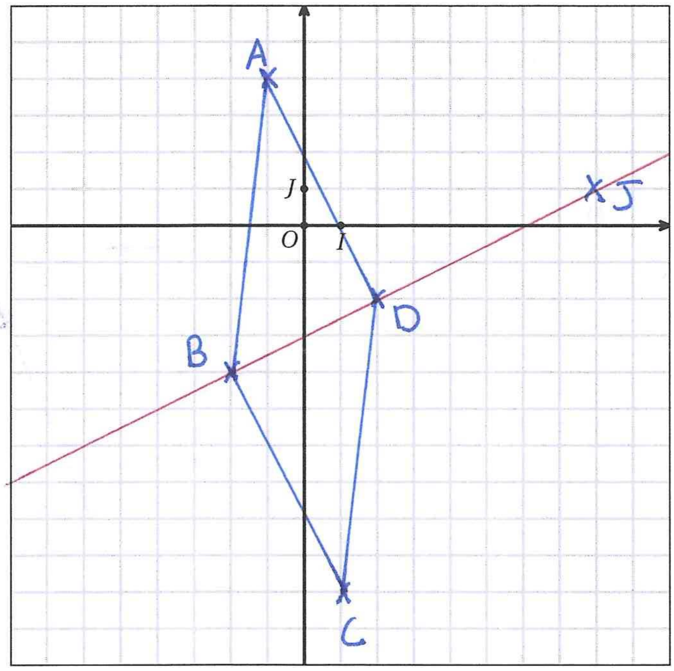
3 **(2 points)**

On se place dans un repére $(O;I,J)$. On considère les points $A\,(2\,;-t)$, $B\,(t+2\,;1)$, $C\,(1\,;2)$ et $D\,(t\,;t)$. Déterminer t pour que (AB) et (CD) soient parallèles.

4 **(5 points)**

Dans un repère orthonormal $(O;I,J)$ on considère les points $A(-1\ ;\ 4)$, $B(-2\ ;\ -4)$, $D(2\ ;\ -2)$ et $E(5\ ;\ 2)$.

1. Calculer les coordonnées de C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Calculer les coordonnées de J tel que $\overrightarrow{JA} = 3\overrightarrow{JE}$.
3. Démontrer que B, D et J sont alignés.



Devoir n° 8.

I ① Q milieu de $[AB]$

$A(-10,0)$; $B(0,4)$ $\Rightarrow$ $Q(-5;2)$

② $\vec{AB}\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $AB^2 = 116$ $\Rightarrow$ $AB = \sqrt{4\times 29} = 2\sqrt{29}$

on déduit que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre Q et rayon $\frac{AB}{2} = \sqrt{29}$.

③ $Q(-5,2)$; $D(-7,7)$ $\Rightarrow$ $\vec{QD}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $QD^2 = 29$ $\Rightarrow$ $QD = \sqrt{29}$

donc $D \in \mathcal{C}$

④ ABD est donc un triangle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ dont $[AB]$ est un diamètre donc par th ABD est rectangle en D.

De plus ABD semble être isocèle. Vérifions.

$\vec{AD}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{BD}\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$ d'où $AD^2 = 9+49$
$= 58$

et $BD^2 = 58$

d'où $AD = BD$ donc ABD est rectangle isocèle en D.

⑤ $\vec{AD}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ $\vec{EF}\begin{pmatrix}6\\14\end{pmatrix}$

on constate que $\vec{EF} = 2\vec{AD}$ donc $\vec{EF}$ et $\vec{AD}$ colinéaires

d'où $(EF) // (AD)$.

⑥ Vérifions que D, B, E sont alignés

$\vec{DB}\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{DE}\begin{pmatrix}21\\-9\end{pmatrix}$ ainsi $\vec{DE} = 3\vec{DB}$ donc $\vec{DE}, \vec{DB}$ colinéaires

$\Rightarrow$ D, B, E alignés

donc $(DE) \perp (DA)$ car ADB rectangle et comme $(DA)//(EF)$ on déduit $(DE) \perp (EF)$ et donc DEF est rectangle en E.

(III) On a $\vec{AB}\begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix}$ $\vec{CD}\begin{pmatrix} t-1 \\ t-2 \end{pmatrix}$

ainsi $(AB) \parallel (CD) \iff \vec{AB}, \vec{CD}$ colinéaires

$\iff t(t-2) - (t-1)(t+1) = 0$

$\iff t^2 - 2t - (t^2-1) = 0$

$\iff -2t + 1 = 0 \iff t = \frac{1}{2}$

ainsi pour $t = \frac{1}{2}$ $(AB) \parallel (CD)$.

(IV) (1) Soit $C(x, y)$; $\vec{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$; $\vec{DC}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+2 \end{pmatrix}$

ABCD parallélogramme $\iff \vec{AB} = \vec{DC}$

$\iff \begin{cases} x-2 = -1 \\ y+2 = -8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = -10 \end{cases}$

d'où $C(1, -10)$

(2) Soit $J(x;y)$ $\vec{JA}\begin{pmatrix} -1-x \\ 4-y \end{pmatrix}$; $\vec{JE}\begin{pmatrix} 5-x \\ 2-y \end{pmatrix}$

$\vec{JA} = 3\vec{JE} \iff \begin{cases} -1-x = 3(5-x) \\ 4-y = 3(2-y) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -1-x = 15-3x \\ 4-y = 6-3y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 16 \\ 2y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$

d'où $J(8, 1)$

(3) $\vec{BD}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{BJ}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

$XY' - X'Y = 20 - 20$
$= 0$ d'où $\vec{BD}, \vec{BJ}$ colinéaires

$\Rightarrow$ B, D, J alignés.