DS 11.

I f affine $\Rightarrow f(x) = mx + p$ avec $m = \dfrac{f(5) - f(3)}{5-3} = \dfrac{-5}{2}$

alors $f(x) = -\frac{5}{2}x + p$.

de plus $f(3) = 2 \Leftrightarrow -\frac{15}{2} + p = 2 \Leftrightarrow p = \frac{19}{2}$ donc $f(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{19}{2}$.

II ① $(2x-3)(1-3x) < 0$

$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$1 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 1/3$

x		$1/3$		$3/2$	
$2x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$1-3x$	$+$	0	$-$		$-$
$(2x-3)(1-3x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

donc $S =]-\infty ; 1/3[\cup]\frac{3}{2} ; +\infty[$.

② $(x-5)^2 \geqslant (x-5)(1-5x) \Leftrightarrow (x-5)^2 - (x-5)(1-5x) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (x-5)((x-5) - (1-5x)) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(6x-6) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 6(x-5)(x-1) \geqslant 0$.

x		1		5	
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$6(x-5)(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

d'où $S =]-\infty ; 1] \cup [5 ; +\infty[$.

③ $x - 1 < \dfrac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1) - \dfrac{1}{x-1} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2 - 1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x}{x-1} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x(x-2)}{x-1} < 0$

On dresse un tableau de signes.

x		0		1		2	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{x(x-2)}{x-1}$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

Donc $S =]-\infty ; 0[\cup]1 ; 2[$.

III ① $A(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)^2}{x-2}$

$x-1=0 \iff x=1$

$x+1=0 \iff x=-1$

$x-2=0 \iff x=2$

x		-1		1		2	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$A(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

② pour $x \in \mathbb{R}$, $(x-1)(x+1)^2 = (x-1)(x^2+2x+1)$

$= x^3+2x^2+x-x^2-2x-1$

$= x^3+x^2-x-1$ donc l'égalité est vérifiée

③ ⓐ Graphiquement on lit $f(x) \leq 0 \iff x \in [1;2[\cup \{1\}$

ⓑ $f(x) \leq 0 \iff \dfrac{x^3+x^2-3}{x-2} - 1 \leq 0$

$\iff \dfrac{x^3+x^2-3-x+2}{x-2} \leq 0$

$\iff \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x-2} \leq 0$

$\overset{②}{\iff} \dfrac{(x-1)(x+1)^2}{x-2} \leq 0 \iff A(x) \leq 0$

$\overset{①}{\iff} x \in \{-1\} \cup [1;2[$

donc $S = [1;2[\cup \{-1\}$.

ⓒ Le résultat est cohérent avec la conjecture du 3ⓐ

IV Méthode 1 : ⓐ Soit $a \leq b$

alors $g(a) - g(b) = (f(a))^2 - (f(b))^2$

$= (f(a)+f(b))(f(a)-f(b))$

ⓑ f est une f° négative donc $f(a)+f(b) \leq 0$

f est croissante donc $f(a) \leq f(b)$ (puisque $a \leq b$)

d'où $f(a)-f(b) \leq 0$

En conséquence par produit $(f(a)+f(b))(f(a)-f(b)) \geq 0$

et donc $g(a) - g(b) \geqslant 0 \iff g(a) \geqslant g(b)$

On déduit g décroissante sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2 : Voir feuille.

V) f_1, f_3, f_5 correspondent à des paraboles.

$f_1(0) = 3$ et de plus le coeff de x^2 de f_1 est positif $\Rightarrow \mathcal{C}_{f_1}$ est une parabole tête en bas

$\Rightarrow \mathcal{C}_{f_1} = C_1$

$f_3(0) = 3 \Rightarrow \mathcal{C}_{f_3} = C_3$

il reste $\mathcal{C}_{f_5} = C_2$

$f_2(0) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \mathcal{C}_{f_2} = C_5$ et donc $\mathcal{C}_{f_4} = C_4$

4 (3 points)

Soit f une fonction strictement négative et croissante sur $\mathbb{R}$. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (f(x))^2$. On souhaite établir le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$. Pour cela on cherche à déterminer si la fonction g « garde ou conserve l'ordre ».

- Méthode 1 : Soient $a; b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
  a) Calculer $g(a) - g(b)$ et l'écrire sous forme factorisée.
  b) En déduire le signe de $g(a) - g(b)$.
  c) En déduire les variations de la fonction g.
- Méthode 2 : Soient $a; b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Compléter le tableau suivant.

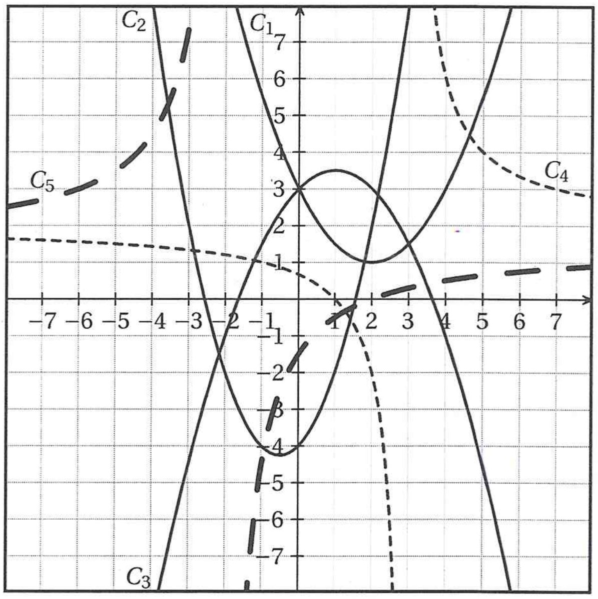
a	$\leq$	b	Justification
$f(a)$	$\leq$	$f(b)$	car $f \uparrow$ sur $\mathbb{R}$
$(f(a))^2$	$\geq$	$(f(b))^2$	car $x \mapsto x^2 \downarrow$ sur $\mathbb{R}_-$ et $f(a) < 0$; $f(b) < 0$
$g(a)$	$\geq$	$g(b)$	

et conclure : donc $g \downarrow$ sur $\mathbb{R}$.

5 (2,5 points)

On donne les fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = \dfrac{3x-6}{2x+4}$ pour $x \neq 2$.
3. $f_3(x) = -\dfrac{x^2}{2} + x + 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. $f_4(x) = \dfrac{-2x+2}{3-x}$ pour $x \neq 3$.
5. $f_5(x) = x^2 + x - 4$ pour $x \in \mathbb{R}$.



Compléter les phrase suivantes par C_1,C_2,C_3,C_4,C_5

1. La fonction f_1 a pour courbe représentative ...C_1
2. La fonction f_2 a pour courbe représentative ...C_5
3. La fonction f_3 a pour courbe représentative ...C_3
4. La fonction f_4 a pour courbe représentative ...C_4
5. La fonction f_5 a pour courbe représentative ...C_2