$\boxed{\text{DS 8 - 4 fev 2014 . 2nde}}$

I ① $y = x^2 - 3$ n'est pas une éq de droite

② $y = \frac{3-2x}{5} \Leftrightarrow$ $\boxed{y = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5} \text{ est l'éq réduite d'une droite}}$

③ $3x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow 2y = 3x + 4$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + 2$ est l'éq réduite d'une droite.

④ $\frac{2}{3}(x-y) = 4 \Leftrightarrow x - y = 6 \Leftrightarrow y = x - 6$

est l'éq réduite d'une droite

⑤ $x^2 - 3y + 4 = 0$ n'est pas l'éq d'une droite.

II On lit $\boxed{d_1 : y = -\frac{2}{5}x + 2}$

$\boxed{d_2 : x = -2}$

$\boxed{d_3 : y = 3}$

$d_4 : y = \frac{5}{9}x + p$ mais $A(4,3) \in d_4$

donc $3 = \frac{5}{9} \times 4 + p \Rightarrow p = \frac{7}{9}$

donc $\boxed{d_4 : y = \frac{5}{9}x + \frac{7}{9}}$.

On a $d_5 : y = -9x + p$ et $B(2,5) \in d_5$

donc $5 = -9 \times 2 + p$ donc $p = 23$

ainsi $\boxed{d_5 : y = -9x + 23}$

et $\boxed{d_6 : y = 2x + 3}$

III $A(-2,+2)$; $B(3;1)$; $C(3,4)$; $D(\sqrt{2};2)$

(AB) :

$x_A \neq x_B \Rightarrow (AB) : y = mx + p$ avec $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1}{5}$

donc $(AB) : y = -\dfrac{1}{5}x + p$

et $A(-2,2) \in (AB) \Rightarrow 2 = \dfrac{2}{5} + p$

$\Rightarrow p = \dfrac{8}{5}$ d'où $\boxed{(AB) : y = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{8}{5}}$.

(BC) :

$x_B = x_C = 3 \Rightarrow \boxed{(BC) : x = 3}$.

(AD) :

$y_A = y_D = +2 \Rightarrow \boxed{(AD) : y = 2}$

(BD) :

$x_B \neq x_D \Rightarrow (BD) : y = mx + p$ avec $m = \dfrac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 3}$

donc $m = \dfrac{\sqrt{2}+3}{2-9} = -\dfrac{\sqrt{2}+3}{7}$

donc $(BD) : y = -\dfrac{\sqrt{2}+3}{7}x + p$

et $B(3,1) \in (BD) \Rightarrow 1 = -\dfrac{\sqrt{2}+3}{7} \times 3 + p$

$\Rightarrow p = 1 + \dfrac{\sqrt{2}+3}{7} \times 3$

$= \dfrac{16 + 3\sqrt{2}}{7}$

donc $\boxed{(BD) : y = -\dfrac{\sqrt{2}+3}{7}x + \dfrac{16+3\sqrt{2}}{7}}$

IV $d : y = 4x - 3$.

$d \parallel d' \Rightarrow m_d = m_{d'}$ c'est-à-dire $m_{d'} = 4$

ainsi $d' : y = 4x + p$ et $A(3,4) \in d'$

donc $4 = 4 \times 3 + p \Rightarrow p = -8$

d'où $\boxed{d' : y = 4x - 8}$.

V $A(-2,3)$; $B(3,1)$ $C(4,4)$.

1 a) B' milieu de $[AC] \Rightarrow B'\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right) \Rightarrow \boxed{B'(1 ; 7/2)}$

b) A l'aide de la calculatrice, on obtient

$\boxed{(BB') : y = -\frac{5}{4}x + \frac{19}{4}}$.

2a) de même : A' milieu de $[BC] \Rightarrow \boxed{A'\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)}$

b) A l'aide de la calculatrice :

$\boxed{(AA') : y = -\frac{x}{11} + \frac{31}{11}}$.

3 a) $K(5/3, 8/3)$

on a $-\frac{5}{4}x_K + \frac{19}{4} = -\frac{5}{4} \times \frac{5}{3} + \frac{19}{4}$

$= \frac{-25 + 3 \times 19}{12} = \frac{8}{3} = y_K \Rightarrow \boxed{K \in (BB')}$.

de même $-\frac{x_K}{11} + \frac{31}{11} = -\frac{5}{33} + \frac{31}{11} = \frac{8}{3} = y_K \Rightarrow \boxed{K \in (AA')}$

b) K intersect° des médianes $\Rightarrow$ K est le centre de gravité de ABC.

Devoir Mathématiques N^o 10 (2h)

1 Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

   On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

   a) Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

   b) Démontrer que pour tout nombre entier naturel n,$u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

   c) Étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1.$$

   Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

   a) Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

   b) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Donner la nature de la suite (w_n). Calculer $w_{2\,009}$.

2 L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \qquad (\star)$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right).$$

   Démontrer que la fonction f admet un minimum.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{7}$.

2. a) Soit n un entier naturel quelconque.
   Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

   b) Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

   c) On déduit de la relation $(\star)$ que la limite ℓ de cette suite est telle que $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{7}{\ell}\right)$.
   Déterminer ℓ.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$.

4. On définit la suite (d_n) par :

$$d_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n^2.$$

   a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n.$$