

① f affine avec $f(3)=2$, $f(-4)=6$.

donc $f(x)=mx+p$ avec $m = \frac{f(-4) - f(3)}{-4 - 3} = \frac{6 - 2}{-7} = -\frac{4}{7}$

alors $f(x) = -\frac{4}{7}x + p$

et $f(3)=2$ donc $-\frac{4}{7} \times 3 + p = 2 \Leftrightarrow p = 2 + \frac{12}{7}$
 $= \frac{26}{7}$

donc $f(x) = -\frac{4}{7}x + \frac{26}{7}$.

②  ① on a $A(x) = x(x+1)$

$$P(x) = 2x + 2(x+1)$$

$$= 4x + 2.$$

donc $A(x) = P(x) \Leftrightarrow x(x+1) = 4x + 2$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 4x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = 0 \quad \text{qfd.}$$

② Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{17}{4} = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{17}{4}$

$$= x^2 - 3x - \frac{8}{4}$$

$$= x^2 - 3x - 2$$

et l'égalité est démontrée

③ Finalement $A(x) = P(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{17}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{17}{4}} \quad \text{ou} \quad x - \frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{17}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \approx -0,56 < 0.$$

impossible

Il y a donc une unique solution au problème avec $x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$

III

① a $g(x) < 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

② $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in [-1; 0[\cup \{1\}$

③ Le maximum de f est 1,2 atteint pour $x = \frac{1}{2}$.

④ pour $x \in \mathbb{R}$: $g(x) - f(x) = \frac{1}{x} - (-x^2 + x + 1)$

$$= \frac{1}{x} + x^2 - x - 1$$

$$= \frac{1 + x^3 - x^2 - x}{x}$$

d'autre part:

$$\begin{aligned}(x-1)^2(x+1) &= (x^2 - 2x + 1)(x+1) \\ &= x^3 - 2x^2 + x + x^2 - 2x + 1 \\ &= x^3 - x^2 - x + 1\end{aligned}$$

et finalement on a donc bien $g(x) - f(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x}$

b) La position relative de g et f est donnée par le signe de $d(x) = g(x) - f(x)$

$$d(x) = g(x) - f(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x}$$

Dressons le tableau de signe:

x	-1	0	1
$(x-1)^2$	+	+	+
$x+1$	-	+	+
x	-	-	+
$d(x)$	+	-	+

ainsi: g au dessus de f sur $]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$
 g en dessous de f sur $]-1; 0[$
(strictement)

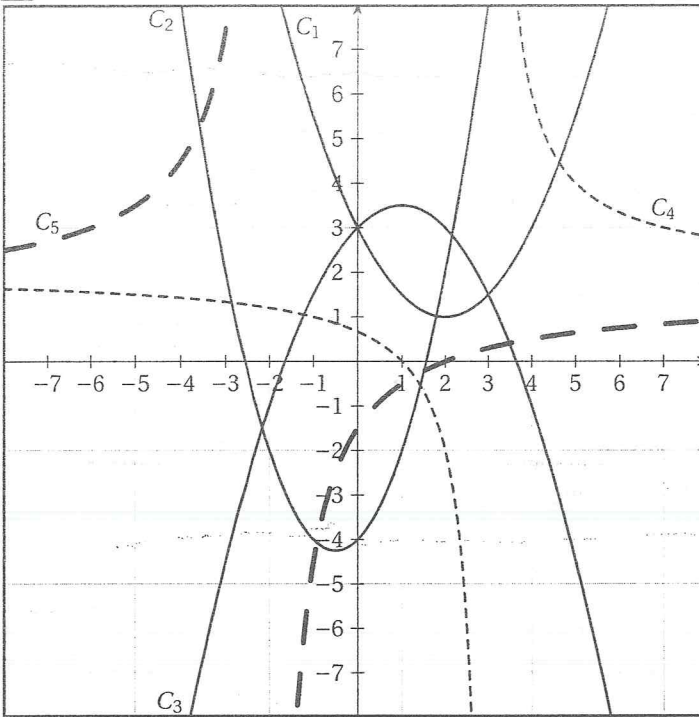
c) l'abscisse x des points d'intersection de f et g satisfait

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1 \text{ d'après le tableau.}$$

On a deux points d'intersection:

$A(1; g(1))$ et $B(-1; g(-1))$ c'est-à-dire $A(1, 1)$ et $B(-1, -1)$.

4 (2 points)



On donne les fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2. $f_2(x) = \frac{3x-6}{2x+4}$ pour $x \neq -2$.

3. $f_3(x) = -\frac{x^2}{2} + x + 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.

4. $f_4(x) = \frac{-2x+2}{3-x}$ pour $x \neq 3$.

5. $f_5(x) = x^2 + x - 4$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Compléter les phrases suivantes par C_1, C_2, C_3, C_4, C_5

1. La fonction f_1 a pour courbe représentative . C_1
2. La fonction f_2 a pour courbe représentative . C_5
3. La fonction f_3 a pour courbe représentative . C_3
4. La fonction f_4 a pour courbe représentative . C_4
5. La fonction f_5 a pour courbe représentative . C_2

5 (3 points) Soit f définie par $f(x) = \left(2 - \frac{3}{x}\right)^2$ sur \mathbb{R} .

Déterminer les variations de f sur $]0; \frac{3}{2}]$ en complétant le tableau d'enchaînement des opérations suivants et en justifiant correctement.

0	<	a	≤	b	≤	$\frac{3}{2}$	Justifications
		$\frac{1}{a}$	\geq	$\frac{1}{b}$	\geq	$\frac{2}{3}$	Car $x \mapsto \frac{1}{x} \downarrow$ sur \mathbb{R}_+^*
		$2 - 3\frac{1}{a}$	\leq	$2 - 3\frac{1}{b}$	\leq	0	Car $x \mapsto 2 - 3x \downarrow$ sur \mathbb{R}
		$\left(2 - 3\frac{1}{a}\right)^2$	\geq	$\left(2 - 3\frac{1}{b}\right)^2$	\geq	0	Car $x \mapsto x^2 \downarrow$ sur \mathbb{R}_-
		$f(a)$	\geq	$f(b)$	\geq	0	#####

Conclure : quel est le sens de variation de f .

pour $0 < a \leq b \leq \frac{3}{2}$ on a $f(a) \geq f(b)$
 donc f est décroissante sur $]0; \frac{3}{2}]$.