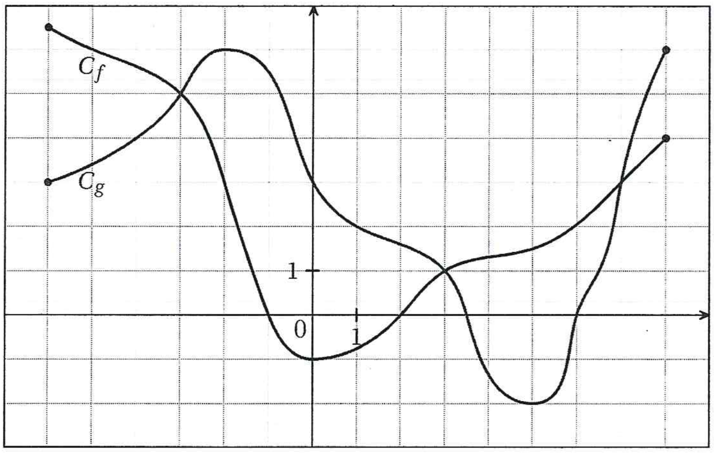
Classe de seconde 1 *27 mars 2015*

Devoir Mathématiques N^o 12 (1 h)

1 **3 points**



Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par la figure.

1. Le domaine de définition de f est $\mathscr{D}_f =$ $[-6\,;\,8]$

2. Résoudre l'équation $g(x) = 3$. $S = \{-6\,;\,0\,;\,7\}$

3. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$. $S = [-3\,;\,3] \cup [7\,;\,8]$

2 **2 points**

Résoudre le sytème suivant par combinaison.

$$S : \begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

3 **6 points**

On considère un rectangle de longueur $L = x + 1$ et de largeur $\ell = x$ où $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du rectangle et $\mathscr{P}(x)$ son périmètre.

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des x pour lesquels $\mathscr{A}(x) > \mathscr{P}(x)$.

1. Déterminer $\mathscr{A}(x)$ et $\mathscr{P}(x)$ en fonction de x.
2. Montrer que le problème équivaut à l'inéquation $x^2 - 3x - 2 > 0$
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 - 3x - 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

4. En déduire la réponse au problème.

27 mars 2015

DS 12 - 1h.

II

$$\begin{cases} x+3y=-1 & L_1 \\ 2x+4y=0 & L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+3y=-1 & \\ -2y=2 & L_2-2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+3y=-1 \\ y=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-1-3y \\ y=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\boxed{S=\{(2;-1)\}}$

III 1) $\mathcal{A}(x)=L\times \ell$ donc $\boxed{\mathcal{A}(x)=x(x+1)}$

$\mathcal{P}(x)=2(L+\ell)$ donc $\boxed{\mathcal{P}(x)=2x+2(x+1)=4x+2}$.

2) $\mathcal{A}(x)>\mathcal{P}(x)$

$\iff x(x+1)>4x+2$

$\iff x^2+x-4x-2>0 \iff \boxed{x^2-3x-2>0}$

3) Pour $x\in\mathbb{R}$, $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4} = x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{17}{4}$

$= x^2-3x-2$

Donc on a bien $\boxed{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4} = x^2-3x-2}$

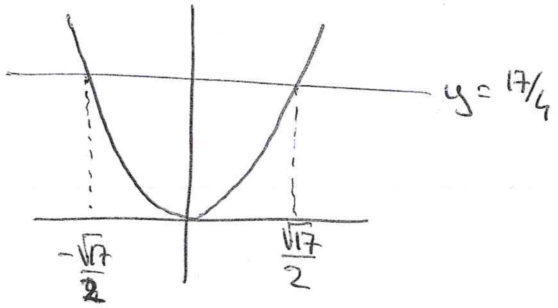
④ On déduit

$$C_t(x) > P(x)$$

$$\overset{(2)}{\iff} x^2 - 3x - 2 > 0$$

$$\overset{(3)}{\iff} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} > 0$$

$$\iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{17}{4}$$



$$X^2 > \frac{17}{4} \iff X < -\frac{\sqrt{17}}{2} \text{ ou } X > \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\iff x - \frac{3}{2} < -\frac{\sqrt{17}}{2} \text{ ou } x - \frac{3}{2} > \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\iff x < \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \text{ ou } x > \frac{\sqrt{17}+3}{2}$$

$$\iff \underbrace{x < \frac{3-\sqrt{17}}{2}}_{\text{impossible car } x>0} \text{ ou } x > \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

Donc finalement, $\boxed{C_t(x) > P(x) \iff x > \frac{3+\sqrt{17}}{2}}$.

IV ① ⓐ La recette est $g(x) = 30.000\,x$ €

mais on veut la recette en milliers d'euros !

donc $g(x) = 30x$

ⓑ g est une fonction linéaire donc sa représentation graphique est une droite.

x	0	10
$g(x)$	0	300

② Par lecture graphique on lit que l'entreprise fait du bénéfice pour $x \in [2 ; 10]$ c'est à dire entre 2 et 10 tonnes de produit vendu.

3 a $x(x-2)(x-10) = (x^2-2x)(x-10)$

$$= x^3 - 2x^2 - 10x^2 + 20x$$

$$= x^3 - 12x^2 + 20x \quad \text{donc} \quad -x(x-2)(x-10) = -x^3 + 12x^2 - 20x$$

d'autre part, $B(x) = g(x) - f(x)$

$$= 30x - (x^3 - 12x^2 + 50x)$$

$$= -x^3 + 12x^2 - 20x$$

ainsi $\boxed{B(x) = -x(x-2)(x-10)}$

b Dressons le tableau de signe de $B(x) = -x(x-2)(x-10)$

$x \geq 0$!

x		0		2		10	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-10$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
-1	$-$		$-$		$-$		$-$
Produit	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

ainsi on lit sur le tableau $\boxed{B(x) > 0 \iff x \in]2;10[}$.

4 La posit° relative de C_g et C_f est donnée par le signe de $d(x) = g(x) - f(x) = B(x)$

ainsi d'après le tableau du 3

sur $[0,2] \cup [10,+\infty[$, C_g est en dessous de C_f

sur $[2;10]$; C_g est au-dessus de C_f

V le 3 est le seul algo qui marche.

1 est faux car $S \leftarrow i$ et non $S \leftarrow S+i$

2, 4 sont les mêmes ~~et~~ faux car $S \leftarrow 0$ dans la boucle

5 faux car $S \leftarrow S + i/3$ n'est pas correct.