Classe de $2^{nde}1$

BÉNILAN Constantin

Le 27 avril 2015

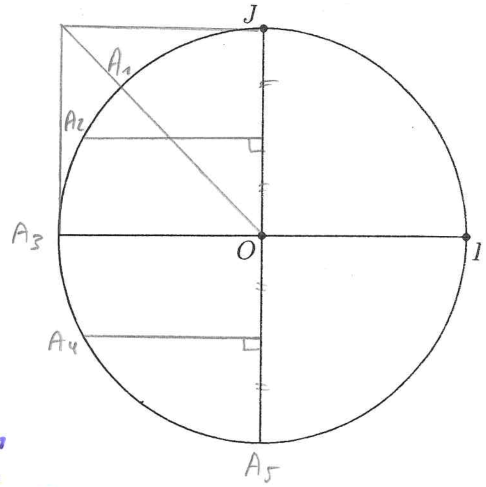
Devoir de mathématiques N° 13

1

1. Sur le cercle trigonométrique ci-joint, placer les points A_i tels que

$$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_1}) = -\frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} = -\pi - \frac{\pi}{4}$$
$$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_2}) = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} = -\pi - \frac{\pi}{6}$$
$$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_3}) = \frac{-15\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} = -5\pi$$
$$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_4}) = \frac{19\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} = 3\pi + \frac{\pi}{6}$$
$$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_5}) = \frac{1029\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} = \frac{1032\pi}{6} - \frac{3\pi}{6}$$

$$\frac{1029\pi}{6} = \frac{1026\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = 171\pi + \frac{\pi}{2}$$



2. Compléter : $\cos(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\sin(-\frac{5\pi}{4}) = +\frac{\sqrt{2}}{2}$

2

On a $\cos x = -0{,}4$ avec $x \in [\pi; 2\pi]$. Que vaut $\sin x$?

3

Simplifier les expressions suivantes :

$A(x) = \cos(x + 839\pi)$

$B(x) = \sin(x + 7\pi) - \cos(x + 34\pi) + \sin(\pi - x)$

4

Montrer l'égalité suivante pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2 = 2$$

5

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

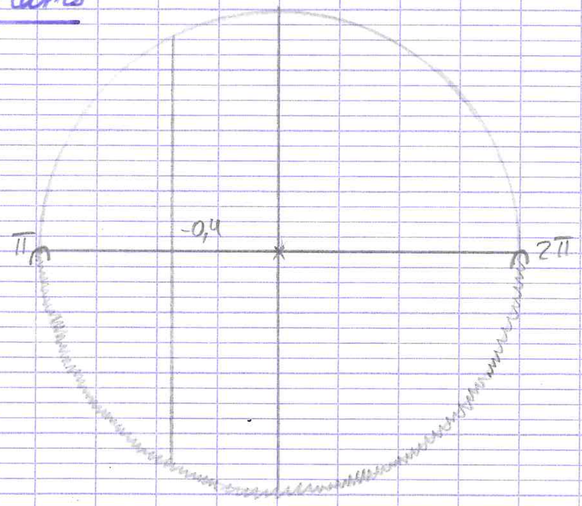
1. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[-\pi; \pi]$
2. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[-2\pi; 2\pi]$
3. $\sin x + \cos x = 4$ dans $[0; 2\pi]$.
4. $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[-\pi; \pi]$.
5. $\sin x > 0$ dans $[0; 3\pi]$.
6. $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi]$

20

Constantin
BÉNILAN
2°1

Maths

(2)



Puisque $\cos(x) = -0{,}4$; et que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$;

On a $0{,}16 + \sin^2(x) = 1$

$\Leftrightarrow \sin^2(x) = 1 - 0{,}16$

$\Leftrightarrow \sin^2(x) = 0{,}84$

donc $\sin(x) = \sqrt{0{,}84}$ ou $\sin(x) = -\sqrt{0{,}84}$

$= \sqrt{\dfrac{21}{25}}$ $\qquad = -\sqrt{\dfrac{21}{25}}$

$= \dfrac{\sqrt{21}}{5}$ $\qquad = -\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

mais $x \in [\pi ; 2\pi]$ (zone hachurée sur le cercle ci-dessus)

donc $\boxed{\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{21}}{5}}$

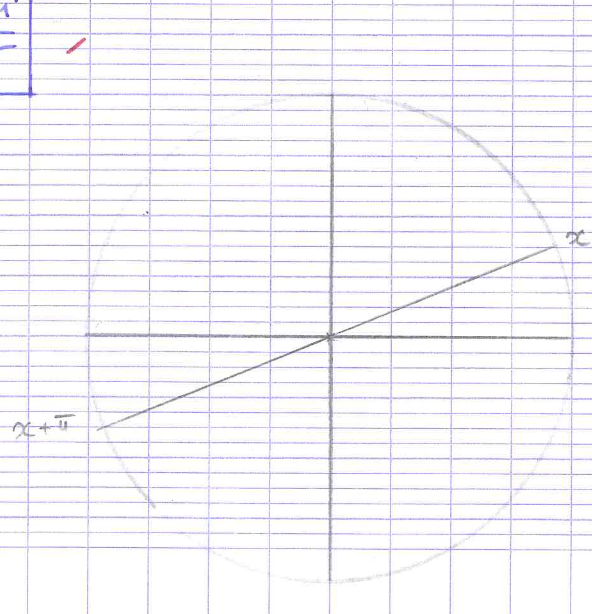
(3)

$A(x) = \cos(x + 839\pi)$

$= \cos(x + \pi)$

$= -\cos(x)$

donc $A(x) = -\cos(x)$



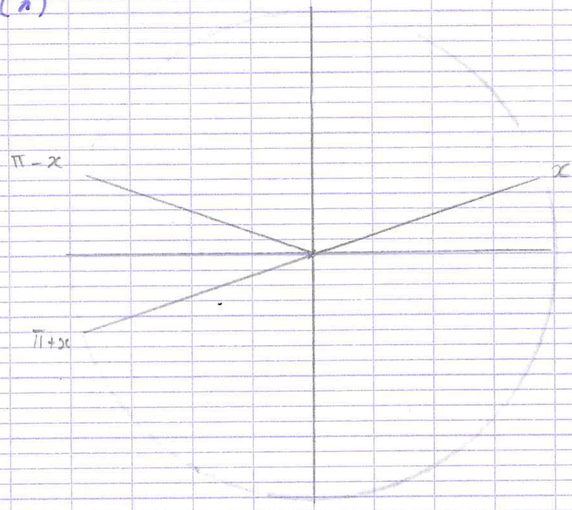
$B(x) = \sin(x + 7\pi) - \cos(x + 34\pi) + \sin(\pi - x)$

$= \sin(x + \pi) - \cos(x) + \sin(\pi - x)$

$= -\sin(x) - \cos(x) + \sin(x)$

$= -\cos(x)$ ✓

donc $B(x) = -\cos(x)$



(4)

Montrons que $(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2 = 2$

$(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x - \cancel{(2\cos x \times \sin x)} + \sin^2 x + \cos^2 x + \cancel{(2\cos x \times \sin x)} + \sin^2$

$= 2\cos^2 x + 2\sin^2 x$

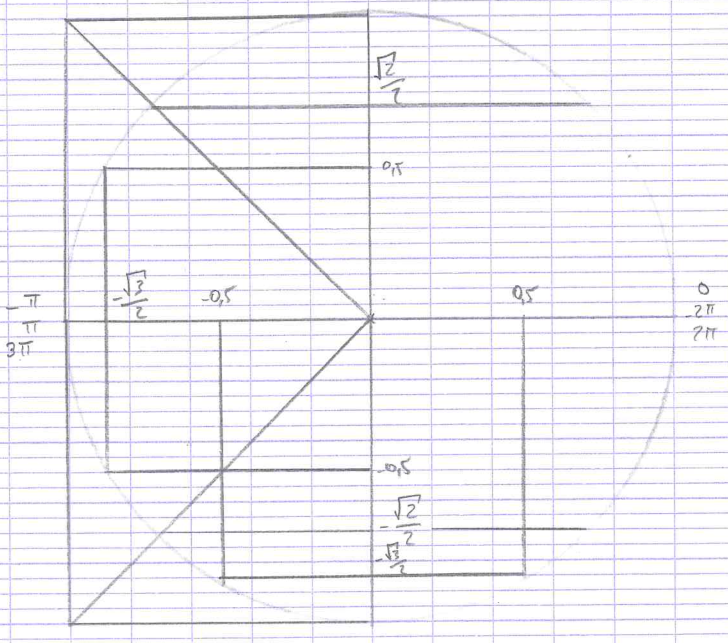
$= 2(\cos^2 x + \sin^2 x)$

Or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

donc $2 \times 1 = 2$

Égalité démontrée ✓

(5)



1) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $S = \{-\frac{3\pi}{4} ; -\frac{\pi}{4}\}$ (sur $[-\pi ; \pi]$)

2) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $S = \{\frac{-7\pi}{6} ; \frac{-5\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} ; \frac{7\pi}{6}\}$ (sur $[-2\pi ; 2\pi]$)

3) $\sin(x) + \cos(x) = 4$; sachant que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ (idem pour $\sin(x)$) ;
si l'on prenait les valeurs maximales de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$ (soit 1) ;
on obtiendrait 2. Or $4 > 2$ donc $S = \emptyset$

4) $\sin(x) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $S = [-\pi ; \frac{-2\pi}{3}[\cup]\frac{-\pi}{3} ; \pi]$ (dans $[-\pi ; \pi]$)

5) $\sin(x) > 0$ $S =]0 ; \pi[\cup]2\pi ; 3\pi[$ (dans $[0 ; 3\pi]$)

6) $\sin^2(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $\sin(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$ $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $S = \{\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}\}$ (dans $[0 ; 2\pi]$)