# DS 15

**I** f est associée au graphe 4

g est ---------- 2

h ---------- 1

i ---------- 3

**II** $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ ; $g(x) = x^2$

① f est une f° polynôme de degré 2 ; g est la f° carrée.

② ⓐ pour $x \in \mathbb{R}$, $2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) + \frac{7}{8}$

$$= 2x^2 - 3x + \frac{9}{8} + \frac{7}{8}$$

$$= 2x^2 - 3x + 2$$

$$= f(x)$$

ⓑ pour $x \in \mathbb{R}$, $2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \geqslant 0$

$$\Rightarrow 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geqslant \frac{7}{8} \quad + \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow f(x) \geqslant \frac{7}{8}$$

d'autre part $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{8}$

donc $\frac{7}{8}$ est le minimum de f atteint en $\frac{3}{4}$

La f° $f$ est une fonction polynôme de degré 2 avec le coeff de $x^2$ qui vaut $2 \geqslant 0$ donc on a le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $3/4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $7/8$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

③ ⓐ $f(x) - g(x) = 2x^2 - 3x + 2 - x^2$
$= x^2 - 3x + 2$

D'autre part : $(x-2)(x-1) = x^2 - 2x - x + 2$
$= x^2 - 3x + 2$

donc on a bien $f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 2$.

ⓑ La position relative de $C_f$ et $C_g$ est donnée par le signe de la différence

$d(x) = f(x) - g(x)$
$= (x-2)(x-1)$

Dressons le tableau de signe

| | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $d(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On déduit alors que sur $]-\infty; 1[ \cup ]2, +\infty[$ $C_f$ est au dessus de $C_g$ et sur $]1; 2[$, $C_f$ est en dessous de $C_g$.

ⓒ D'après le tableau $f(x) = g(x)$ pour $x = 1$ et $x = 2$

On a donc 2 points d'intersect° : $A(1; g(1))$ et $B(2; g(2))$

c'est-à-dire $A(1; 1)$ et $B(2; 4)$

III ① $\mathcal{A}(MAN) = \frac{x^2}{2}$ car MAN triangle rectangle de côté $x$.

D'après les hypothèses $NB = 12 - x$ et $BP = 8 - x$

ainsi comme NPB triangle rectangle en B, on a

$$\mathcal{A}(NBP) = \frac{NB \times BP}{2} = \frac{1}{2}(12-x)(8-x)$$

② On a
$$\begin{aligned}\mathcal{A}(MNPQ) &= \mathcal{A}(ABCD) - 2\times\mathcal{A}(MAN) - 2\mathcal{A}(NBP)\\ &= 8\times 12 - x^2 - (12-x)(8-x)\\ &= 96 - x^2 - [96 - 8x - 12x + x^2]\\ &= -2x^2 + 20x\end{aligned}$$

donc $f(x) = -2x^2 + 20x$.

④ Par lecture graphique :

Aire de ABCD est $8\times 12 = 96$ donc $\frac{1}{2}\mathcal{A}(ABCD) = 48$

On cherche donc $f(x) \geqslant 48$

par lecture graphique $S = [4 ; 6]$

La longueur AM doit être comprise entre 4 et 6 pour avoir $\mathcal{A}(MNPQ) \geqslant 48$.

IV Les données de l'énoncé se traduisent par

$f(0)=7$ ; $f(2)=1$ ; $f(3)=1$

$$\iff \begin{cases} c=7 \\ 4a+2b+c=1 \\ 9a+3b+c=1 \end{cases}$$

donc on a $c=7$ et $\begin{cases} 4a+2b=-6 \\ 9a+3b=-6 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 4a+2b=-6 \\ 6a=6 \quad 2L_2-3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=1 \\ 2b=-6-4a \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \end{cases}$$

On a donc $f(x)=x^2-5x+7$

Rq : En traçant le graphe à la calculatrice, on s'aperçoit que le résultat est cohérent.

V ① $M(x;f(x))$ ; $A(1,1)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ f(x)-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ x^2 \end{pmatrix}$

alors par th on a $AM^2=(x-1)^2+x^4$

$$= x^4+x^2-2x+1$$

② Graphiquement à l'aide de la calculatrice on lit que la f° $g(x)=x^4+x^2-2x+1$ admet un minimum $m \approx 0,289$ atteint en $x_0 \approx 0,59$.

③ On a $AM^2=g(x)$ donc le minimum de la distance AM est atteint pour $x \approx x_0 \approx 0,59$ le point $M_0$ associé est $M(x_0;f(x_0))$

donc M a pour coordonnées $\approx (0,59;1,35)$