Classe de 2^8 *8 avril 2016*

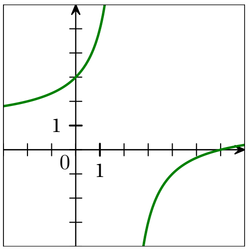
Devoir surveillé de mathématiques N^o 15 (2h)

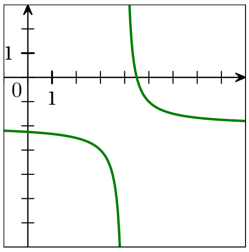
0 Nom et prénom :

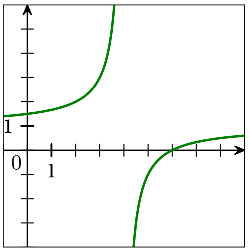
1 *Cet exercice est à faire sur la copie.*
Associer à chaque fonction sa représentation graphique.

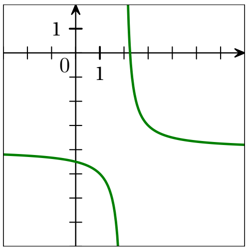
$f(x) = \dfrac{1}{x-2} - 4$ $\qquad$ $g(x) = \dfrac{1}{x-4} - 2$

$h(x) = \dfrac{-4}{x-2} + 1$ $\qquad$ $i(x) = \dfrac{-2}{x-4} + 1$

1.


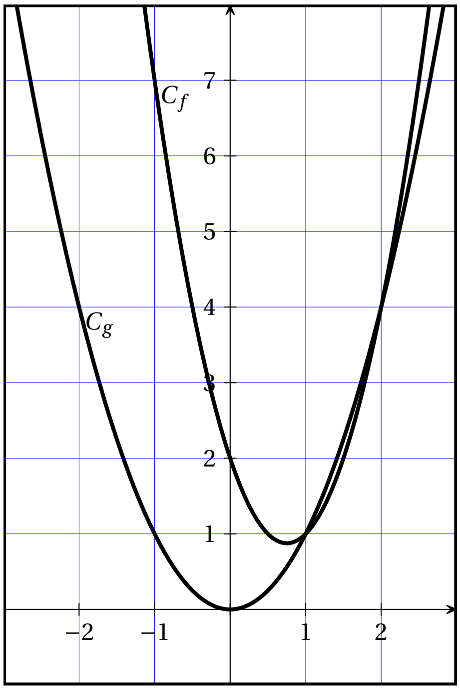
2.


3.


4.


2

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ et $g(x) = x^2$.
On donne ci-contre les graphes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g.

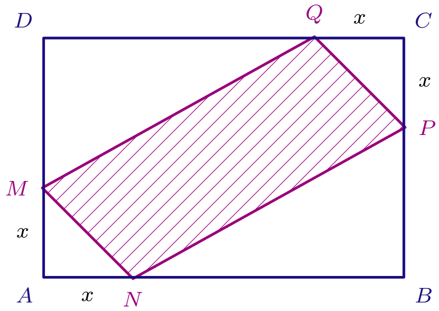


1. De quelle nature sont les fonctions f et g ?
2. Etude de la fonction f.
   a) Montrer que $f(x) = 2(x - \frac{3}{4})^2 + \frac{7}{8}$.
   b) Déterminer alors le minimum de la fonction f (en justifiant) et dresser son tableau de variations.
3. On souhaite étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
   a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$

   $$f(x) - g(x) = (x-2)(x-1)$$

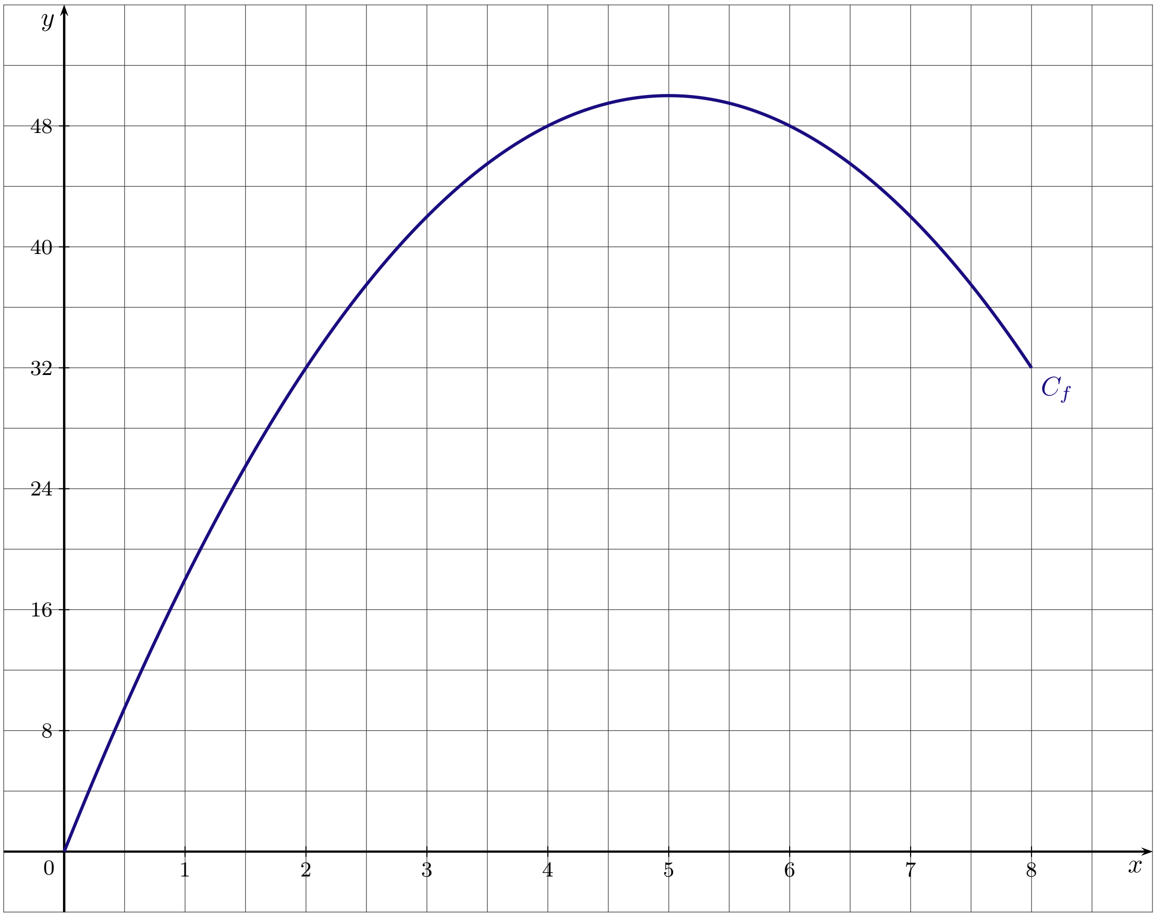
   b) En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
   c) Déterminer les coordonnés des points d'intersection de ces deux courbes.

3 $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 12$ et $AD = 8$.
M étant un point du segment $[AD]$, on construit le quadrilatère $MNPQ$ comme indiqué sur la figure ci-dessous, avec $AM = AN = CP = CQ$



On pose $AM = x$ avec $x \in [0; 8]$.

1. Exprimer en fonction de x l'aire du triangle MAN ainsi que l'aire du triangle NBP
2. On note $f(x)$ l'aire du quadrilatère $MNPQ$. Exprimer $f(x)$ puis donner sa form développée.
   La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.
3. Par lecture graphique, déterminer les positions éventuelles du point M sur le segment $[AD]$ pour que l'aire du quadrilatère $MNPQ$ soit supérieure à la moitié de l'aire du rectangle $ABCD$.



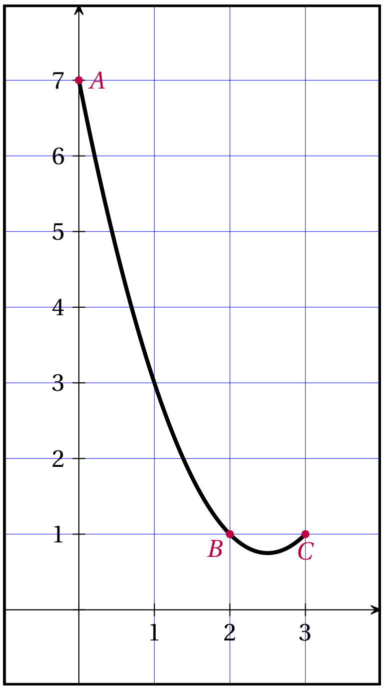
4

Un centre de loisir désire construire un toboggan vertigineux pour une piscine. Il choisit de faire cela sous la forme d'un arc de parabole (voir figure). Le toboggan commence au point $A(0;7)$, passe par le point $B(2;1)$ et termine en $C(3;1)$.
On recherche la fonction f définissant cette parabole. Pour cela on définit f sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec a,b, et c des nombres réels.

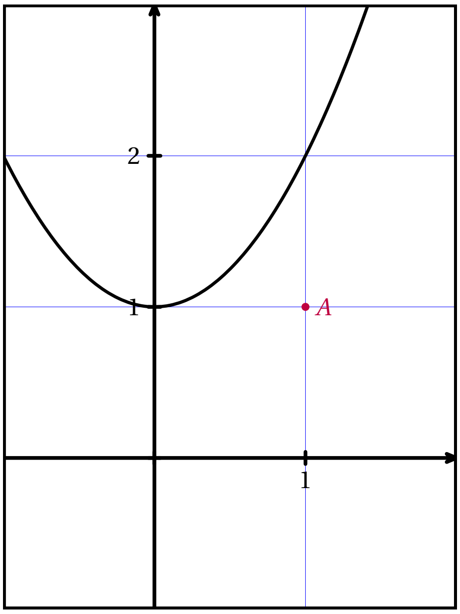
1. Écrire un système d'équations traduisant les données de l'énoncé.
2. Le résoudre et donner la fonction f.



5

On donne $\mathscr{P}$ la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 + 1$ représentée ci-contre et $A(1;1)$. Le but de l'exercice est de déterminer la plus courte distance entre la parabole $\mathscr{P}$ et le point A. Soit M un point d'abscisse x de la parabole $\mathscr{P}$. On a donc $M(x; f(x))$.

1. Déterminer AM^2 en fonction de x puis montrer que $AM^2 = x^4 + x^2 - 2x + 1$.
2. Soit $g(x) = x^4 + x^2 - 2x + 1$.
   En utilisant le mode graphique de la calculatrice, déterminer le minimum de la fonction g. Vous donnerez un arrondi à 10^{-1}.
3. En déduire la distance minimale entre la courbe $\mathscr{P}$ et le point A. Pour quel point M ce minimum est-il atteint ? Tracer alors le point sur le graphique.



6 *Cet exercice est à faire sur la copie.*

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{(4-2x)^2}$ sur $]2;+\infty[$.

1. Déterminer les variations de f sur $]2;+\infty[$ en complétant le tableau d'enchaînement des opérations suivants et en justifiant correctement.

2	$\leq$	a	$\leq$	b	Justification
		$4-2a$		$4-2b$	
		$(4-2a)^2$		$(4-2b)^2$	
		$f(a)$		$f(b)$	

2. Comparer sans calculatrice les nombres $A = \dfrac{1}{(4-2\times 2{,}127)^2}$ et $B = \dfrac{1}{(4-2\times 2{,}128)^2}$.