DS12

I ① Voir copie

② On conjecture que la distance est de 5,1 cm environ.

③a $H \in \mathcal{C}_f$ donc $H(x, f(x))$

et $A(+4\,;-1)$ donc $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x-4 \\ f(x)+1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x-4 \\ \frac{1}{2}x+4 \end{pmatrix}$

alors par th

$$AH^2 = (x-4)^2 + \left(\tfrac{1}{2}x+4\right)^2$$

$$= x^2 - 8x + 16 + \tfrac{1}{4}x^2 + 4x + 16$$

$$= \tfrac{5}{4}x^2 - 4x + 32$$

On a bien $g(x) = AH^2 = \frac{5}{4}x^2 - 4x + 32$.

③b D'après géogebra la forme canonique de $g(x)$ est

$$g(x) = \tfrac{5}{4}\left(x - \tfrac{8}{5}\right)^2 + \tfrac{144}{25}$$

donc g est un polynôme de degré 2 avec $a = \frac{5}{4} > 0$ donc par th le tableau de variation est :

x	$-\infty$	$8/5$	$+\infty$
$g(x)$	↘	$\frac{144}{25}$	↗

③c AH^2 est donc minimale pour $x = \frac{8}{5}$ et vaut alors $\frac{144}{25}$

La distance AH est alors $AH = \sqrt{\frac{144}{25}} \approx 5{,}4$

③d Le segment [AH] semble perpendiculaire à la droite $\mathcal{C}_f$.

③e Soit $B(0,3) \in \mathcal{C}_f$; $H\left(\frac{8}{5}; f\left(\frac{8}{5}\right)\right) \in \mathcal{C}_f$ et $A(+4,-1)$

Montrons que BHA rectangle en H.

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} 8/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \Rightarrow BH^2 = \frac{64}{25} + \frac{16}{25} = \frac{80}{25}$

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow BA^2 = 32$

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -12/5 \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow AH^2 = \frac{144}{25} + \frac{576}{25} = \frac{720}{25}$

et $AH^2 + BH^2 = \frac{720+80}{25} = \frac{800}{25} = 32 = AB^2$

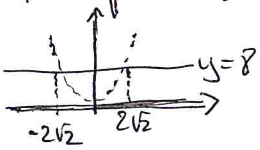
donc ABH rectangle en H donc $[AH] \perp \mathcal{C}_f$

II ① $f(x) = 8 - x^2$

Pour résoudre le problème, il faut $x \geqslant 0$ et $f(x) \geqslant 0$

$f(x) \geqslant 0 \iff 8 - x^2 \geqslant 0$

$\iff x^2 \leq 8$



$\iff x \in [-2\sqrt{2} ; +2\sqrt{2}]$

Donc le domaine de définition de A est $\mathcal{D} = [0, 2\sqrt{2}]$

② Le rectangle ABCD a pour coté $2x$ et $f(x)$

donc $f(x) = 2x\, f(x)$

$= 2x(8 - x^2)$

③ D'après la calculatrice le maximum de f est environ $17,419$ pour $x \approx 1,633$.

III ① D'après le graphique les solutions de $f(x) > g(x)$ sont $S =]2, 0[\cup]3 ; +\infty[$

② ⓐ On a $f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2 - (3x + 2)$

$= x^3 - x^2 - 6x$

$= x(x^2 - x - 6)$

D'autre part $x(x-3)(x+2) = x(x^2 - 3x + 2x - 6) = x(x^2 - x - 6)$

ainsi on a bien l'égalité souhaitée :

$f(x) - g(x) = x(x-3)(x+2)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

ⓑ Dressons le tableau de signe de $f(x) - g(x)$.

x		-2		0		3	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x(x-3)(x+2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi d'après le tableau de signes on a $f(x) > g(x)$ ssi $f(x) - g(x) > 0$ et $S =]-2 ; 0[\cup]3 ; +\infty[$.

IV ① $f(4) = 5$ veut dire que l'année $2010 + 4 = 2014$ il y a 500 agences.

② ⓐ $f(0) = 2 \iff a.0^2 + b.0 + c = 2 \iff c = 2$

$f(2) = 3 \iff a.2^2 + b \times 2 + c = 3 \iff 4a + 2b = 1$

$f(4) = 5 \iff a.4^2 + b.4 + c = 5 \iff 16a + 4b = 3$

on a donc un système : $\begin{cases} c = 2 \\ 4a + 2b = 1 \\ 16a + 4b = 3 \end{cases}$

(2b) $\begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ 16a + 4b = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ 4b = 1 \quad 4L_1 - L_2 \end{cases}$

donc $b = \frac{1}{4}$ et $4a = 1 - 2b$

$\iff 4a = \frac{1}{2} \iff a = \frac{1}{8}$

Le système a donc pour solution $\{(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, 2)\}$

et $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 2$.

(3) $2016 = 2010 + 6$; on doit calculer $f(6) = \frac{1}{8}6^2 + \frac{1}{4}.6 + 2$

$= 8$

ainsi en 2016, on peut prévoir 800 agences.

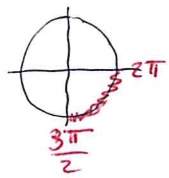
(V) On a $\cos x = \frac{12}{13}$ et $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

alors $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\sin^2 x = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2$

$= \frac{25}{169}$

donc $\sin x = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$ ou $\sin x = -\frac{5}{13}$

mais $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ donc $\sin x < 0$



donc $\sin x = -\frac{5}{13}$.

(VI) $f(x) = (2\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - 2\sin x)^2$

$= 4\cos^2 x + 4\cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - 4\cos x \sin x + 4\sin^2 x$

$= 5\cos^2 x + 5\sin^2 x$

$= 5(\cos^2 x + \sin^2 x) = 5$

La fonction f est bien constante.

Exercice 6 : (2 points)

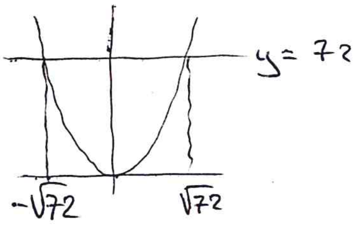
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression ci-dessous est une constante que l'on déterminera.

$$f(x) = (\cos x + 3\sin x)^2 + (3\cos x - \sin x)^2$$

Exercice 7 : (6 points)

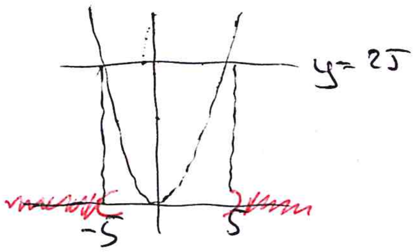
Résoudre en utilisant les propriétés des fonctions de référence les équations et inéquations suivantes :

$I_1 : \ x^2 = 72$



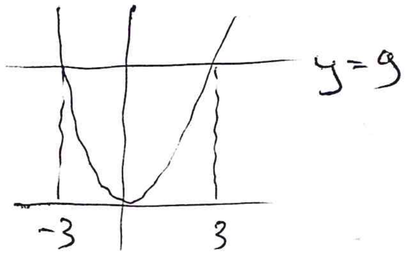
$\boxed{S = \{ 6\sqrt{2} \, ; -6\sqrt{2} \}}$

$I_2 : \ x^2 > 25$



$\boxed{S =]-\infty \, ; -5[\cup]5, +\infty[}$

$I_3 : \ (x+1)^2 < 9$



On a $X^2 < 9 \iff -3 < X < 3$

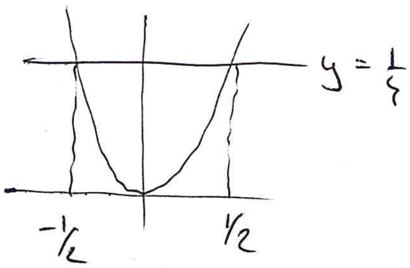
Donc $(x+1)^2 < 9 \iff -3 < x+1 < 3$

$\iff -4 < x < 2$.

$\boxed{S =]-4 \, ; 2[}$

$I_4 : \ \dfrac{1}{x^2} < 4$

$\iff x^2 > \dfrac{1}{4}$ (en appliquant la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$)



donc $\boxed{S =]-\infty \, ; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[}$

Exercice 8 : (3 points)

Dans cet exercice aucune justification n'est demandée
Sur les cercles trigonométriques ci-contre, placer les points A_i tels que

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_1}) = -\dfrac{-4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

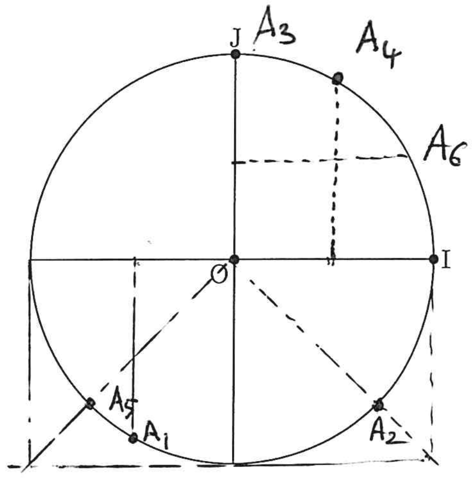
$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_2}) = \dfrac{55\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_3}) = \dfrac{121\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_4}) = \dfrac{49\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_5}) = \dfrac{13\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

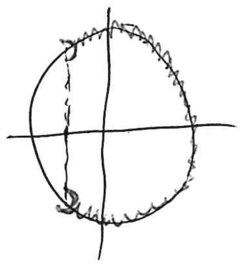
$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_6}) = -\dfrac{23\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$



Exercice 9 : (5 points)

Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ puis dans $[0;2\pi]$.

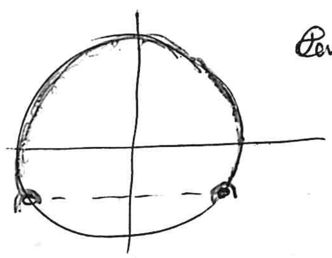
$I_1 :\ \cos x > -\dfrac{1}{2}$



Dans $[-\pi;\pi]$, $S = \left]-\frac{2\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right[$

Dans $[0;2\pi]$; $S = \left[0, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3} ; 2\pi\right]$

$I_2 :\ \sin x > -\dfrac{1}{2}$

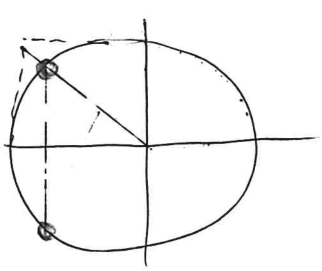


Dans $[-\pi,\pi]$ $S = \left[-\pi ; -\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6} ; \pi\right]$

Dans $[0,2\pi]$: $S = \left[0, \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6} ; 2\pi\right]$

$I_3 :\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Dans $[-\pi,\pi]$; $S = \left\{-\frac{3\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right\}$



Dans $[0,2\pi]$: $S = \left\{\frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}\right\}$