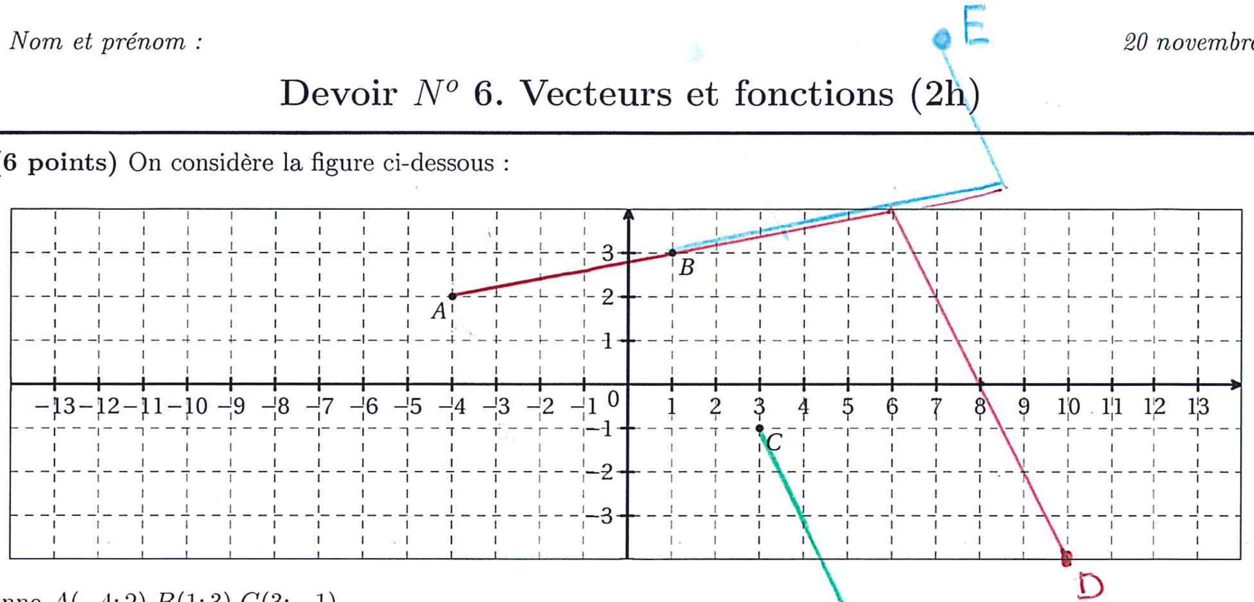
$2^{nde}4$, *Nom et prénom :* *20 novembre 2017*

Devoir N^o 6. Vecteurs et fonctions (2h)

I **(6 points)** On considère la figure ci-dessous :



On donne $A(-4;2)$,$B(1;3)$,$C(3;-1)$.

1. Construire les points D, E et K définis par :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}; \qquad \overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB};$$

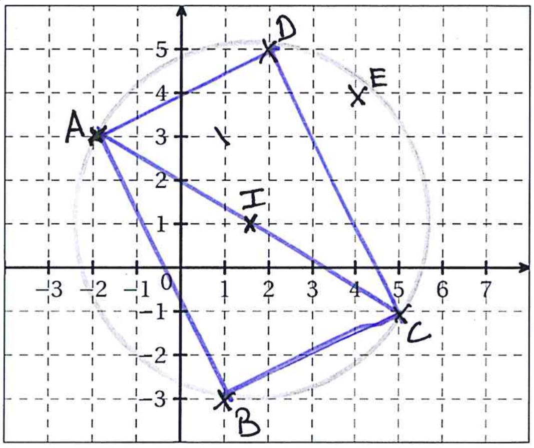
K

2. Déterminer par le calcul les coordonnées de D, E et K .

II **(11 points)**

Soient les points $A(-2;3)$ $B(1;-3)$, $C(5;-1)$, $D(2;5)$ et $E(4;4)$.

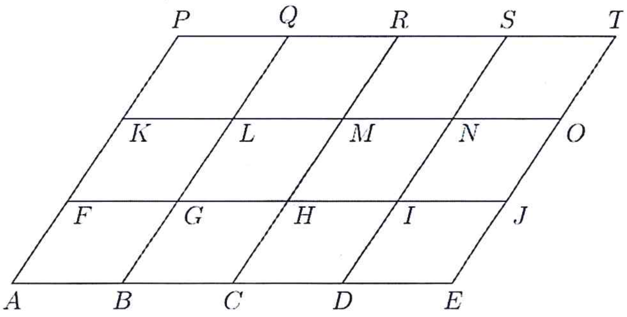
1. Placer ces cinq points. On complétera la figure au fur et à mesure des questions.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ? (le démontrer)
3. Calculer les coordonnées du point I milieu du segment [AC].
4. Démontrer que les points A, B et C sont sur un même cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon R que l'on déterminera.
5. Les points D et E appartiennent-ils à ce même cercle $\mathscr{C}$?
6. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? (le démontrer)



III **(4 points)**

On donne la figure ci contre. Compléter les égalités suivantes :

- $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KM}$
- $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{MP}$
- $\overrightarrow{FL} + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FM}$
- $\overrightarrow{EM} - \overrightarrow{RL} = \overrightarrow{BD}$



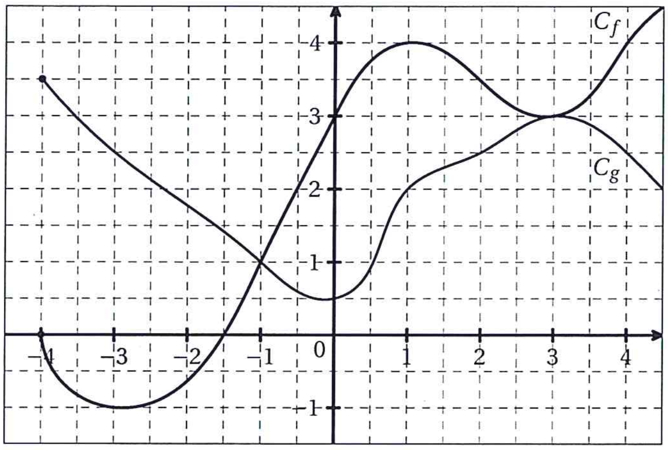
IV **(6 points)** Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = -2x^2 + x + 1$.

1. A l'aide de la calculatrice et des graphiques des fonctions déterminer les solutions de $f(x) = g(x)$. Vous arrondirez les valeurs à 10^{-2}.
2. Montrer que $f(x) - g(x) = (3x - 2)(x + 1)$.
3. En déduire la résolution par le calcul de $f(x) = g(x)$. Cela correspond-il avec la résolution graphique ?

V **(3 points)** Monter que l'égalité suivante pour tous réels a et b :

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

VI **(7 points)** Pour cet exercice, vous répondrez directement sur le sujet.



1. Quel est l'ensemble de définition des fonctions f et g ?

On a $D_f = D_g = [4;+\infty[$.

2. Dresser les tableaux de variations de f et g.

x	-4		0		3		$+\infty$
$g(x)$	$3{,}5$	↘	$0{,}5$	↗	3	↘	

x	-4		-3		1		3		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	-1	↗	4	↘	3	↗	

3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$.

$S = \{0, 3\}$

4. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = -1$

$S = \emptyset$

5. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) > 1$

$S = [-4; -1[\cup]+0{,}5; ?[$

On ne peut pas savoir avec le graphique

6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$

$S = [-4; -1] \cup \{3\}$

VII **(3 points)**

On donne l'algorithme suivant écrit en langage naturel.

```
pour i allant de 1 à 30 :
  si  i multiple de 7:
    affiche Beuz
  sinon si l écriture de i contient un 7 :
    affiche Beuz
  sinon affiche i.
  fin si
fin pour
```

Ecrivez ci-dessous l'affichage donné par l'ordinateur.

1, 2, 3, 4, 5, 6, Beuz, 8, 9, 10, 11, 12, 13, Beuz, 15, 16, Beuz, 18, 19, 20, Beuz, 22, 23, 24, 25, 26 Beuz, Beuz, 29, 30.

DS6 (Vecteurs, fonctions)

I ① Voir feuille

② • Soit $D(x;y)$ alors $\vec{AD}\begin{pmatrix}x+4\\y-2\end{pmatrix}$; $\vec{AB}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$; $\vec{BC}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{AD}=2\vec{AB}+2\vec{BC}$ ssi $\begin{cases}x+4=2\times5+2\times2\\y-2=2\times1+2\times(-4)\end{cases}$

ssi $\begin{cases}x+4=14\\y-2=-6\end{cases}$ ssi $\begin{cases}x=10\\y=-4\end{cases}$

donc $D(10;-4)$

• Soit $E(x;y)$; $\vec{BE}\begin{pmatrix}x-1\\y-3\end{pmatrix}$; $\vec{AB}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$; $\vec{BC}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{BE}=\frac{3}{2}\vec{AB}-\vec{BC}$ ssi $\begin{cases}x-1=\frac{3}{2}\times5-2\\y-3=\frac{3}{2}+4\end{cases}$

ssi $\begin{cases}x=13/2\\y=17/2\end{cases}$ donc $E\left(\frac{13}{2};\frac{17}{2}\right)$

• Soit $K(x;y)$; $\vec{CK}\begin{pmatrix}x-3\\y+1\end{pmatrix}$; $\vec{BC}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$; $\vec{AB}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

$\vec{CK}=\vec{BC}-2\vec{AB}$ ssi $\begin{cases}x-3=2-10\\y+1=-4-2\end{cases}$

ssi $\begin{cases}x=-5\\y=-7\end{cases}$ donc $K(-5;-7)$.

II ① Voir figure.

② On a $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$; $\vec{BC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$

donc $AB^2 = 9+36 = 45$;

$BC^2 = 16+4 = 20$.

$AC^2 = 49+16 = 65$

donc on a $AB^2 + BC^2 = 45+20 = 65 = AC^2$!

On déduit par th de Pythagore que le triangle ABC est rectangle en B.

③ I milieu de [AC] donc par th $I\left(\frac{x_A+x_C}{2} ; \frac{y_A+y_C}{2}\right)$

donc $\boxed{I\left(\frac{3}{2} ; 1\right)}$

④ ABC rectangle en B donc par th ABC est inscrit dans le cercle ayant [AC] pour diamètre.

Le cercle a donc pour centre le milieu de [AC], c'est-à-dire le point $I(3/2, 1)$

Le rayon R est donc la longueur IA.

Nous avons $\vec{IA}\begin{pmatrix}-2-3/2\\3-1\end{pmatrix}$ donc $\vec{IA}\begin{pmatrix}-7/2\\2\end{pmatrix}$.

donc $IA^2 = \frac{49}{4} + 4 = \frac{65}{4}$ donc $\boxed{R = IA = \frac{\sqrt{65}}{2}}$

⑤ $\vec{ID}\begin{pmatrix}1/2\\4\end{pmatrix}$ donc $ID^2 = 16 + \frac{1}{4} = \frac{65}{4}$ donc $ID = R$ d'où $D \in \mathcal{C}$.

$\vec{IE}\begin{pmatrix}5/2\\3\end{pmatrix}$ donc $IE^2 = \frac{25}{4} + 9 = \frac{61}{4}$ donc $IE \neq R$ d'où $E \notin \mathcal{C}$.

⑥ $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$; $\vec{DC}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ donc $\vec{AB} = \vec{DC}$. On déduit ABCD parallélogramme et comme il a un angle droit, c'est un rectangle.

(III) Voir feuille.

(IV) ① A la calculatrice $f(x)=g(x)$ a pour solution $S=\{-1\,;\,0{,}67\}$

② $f(x)-g(x) = x^2+2x-1+2x^2-x-1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$= 3x^2+x-2$

D'autre part $(3x-2)(x+1) = 3x^2-2x+3x-2$

$= 3x^2+x-2$

Ainsi on a bien $f(x)-g(x)=(3x-2)(x+1)$.

③ $f(x)=g(x)$ ssi $f(x)-g(x)=0$

ssi $(3x-2)(x+1)=0$

ssi $x=\frac{2}{3}$ ou $x=-1$ donc $S=\{\frac{2}{3}\,;\,-1\}$.

Cela correspond à la résolution à la calculatrice car $\frac{2}{3}\approx 0{,}67$

(V) Pour $a,b \in \mathbb{R}$, $(a+b)^2-(a-b)^2 = a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$= 2ab+2ab$

$= 4ab.$

L'égalité est vérifiée.

(VI) Voir feuille.

(VII) Voir feuille.