$\boxed{\text{DS 14 - La totale}}$.

I ② $A \in \mathcal{C}_f$ donc $A(\frac{-1}{2}, f(\frac{-1}{2}))$ donc $A(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4})$

$B \in \mathcal{C}_f$ alors $B(2, 2^2)$ donc $B(2, 4)$

(AB) : $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{4 - 1/4}{2 - (-\frac{1}{2})} = \dfrac{\frac{15}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{15}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{2}$

On a alors $(AB) : y = \frac{3}{2}x + b$

et $B(2;4) \in (AB)$ donc $4 = \frac{3}{2} \times 2 + b$ d'où $b = 1$

On a donc $\boxed{(AB) : y = \frac{3}{2}x + 1}$.

③ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 15/4 \\ 5/2 \end{pmatrix}$ donc par th $AB^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{225}{16} + \frac{25}{4} = \frac{325}{16}$

donc $AB = \sqrt{\frac{325}{16}} = \frac{\sqrt{325}}{\sqrt{16}} = \boxed{\frac{5\sqrt{13}}{4}}$.

II ① La forme factorisée est $f_1(x) = a(x+1)(x-4)$

et on sait que $f(2) = -2$ donc $a \times 3 \times (-2) = -2$ donc $a = \frac{1}{3}$.

Alors $\boxed{f(x) = \frac{1}{3}(x+1)(x-4)}$.

② La forme canonique de f est $f(x) = a(x-3)^2 + (-3)$

et on sait que $K(-1;-2) \in \mathcal{C}_f$ donc $-2 = a(-4)^2 - 3$

donc $-2 = 16a - 3$ et $a = \frac{1}{16}$

donc $\boxed{f(x) = \frac{1}{16}(x-3)^2 - 3}$.

III ① • $-3 < x < -1$ donc $-\frac{1}{3} > \frac{1}{x} > -\frac{1}{1}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissant sur $\mathbb{R}_-^*$

donc $-1 < \frac{1}{x} < -\frac{1}{3}$.

• $2 < x < 7$ donc $\frac{1}{2} > \frac{1}{x} > \frac{1}{7}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ ↘ sur $\mathbb{R}_+^*$

② $-5 < x < -2$ donc $25 > x^2 > 4$ car $x \mapsto x^2$ ↘ sur $\mathbb{R}_-$

donc $\frac{1}{25} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{4}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ ↘ sur $\mathbb{R}_+^*$

IV ① Intersection de $\mathcal{C}_f$ avec (Ox) :

$f(x) = 0 \iff 5 - x^2 = 0 \iff x^2 = 5 \iff x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$.

Les points d'intersection sont $C(-\sqrt{5};0)$ et $C'(\sqrt{5};0)$.

② D'après ce qui précède, le domaine pour $\mathcal{A}$ est $D = [-\sqrt{5};\sqrt{5}]$

③ $A(x;0)$; $B(x;5-x^2)$; $C(-\sqrt{5},0)$

$AC = x - (-\sqrt{5}) = x + \sqrt{5}$.

$AB = 5 - x^2$.

④ On a donc $\mathcal{A}(x) = AB.AC.\frac{1}{2}$

$= (x+\sqrt{5})(5-x^2).\frac{1}{2}$

$= \left(-x^3 - \sqrt{5}x^2 + 5x + 5\sqrt{5}\right).\frac{1}{2}$.

$\mathcal{A}$ est donc un polynôme de degré 3.

⑤ D'après la calculatrice, pour $x \simeq 0{,}75$ l'aire est maximale et vaut 6,62 environ

V ① ⓐ $f(x) = 0{,}2x^2 - 3x + 6$

f est un polynôme de degré 2 avec $a = 0{,}2$; $b = -3$; $c = 6$.

On déduit le tableau de variations avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{0{,}4} = 7{,}5$

et $\beta = f(7{,}5) = -5{,}25$

x	$-\infty$	$7{,}5$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-5{,}25$	↗

ⓑ le minimum est $-5{,}25$ atteint en $7{,}5$.

② h est une fonction affine. $\mathcal{C}_h$ est une droite

x	0	6
$h(x)$	6	0

③ Graphiquement, l'ensemble des solutions de $f(x) < h(x)$ est

$S =]0;10[$.

④ ⑤ $f(x) - h(x) = 0{,}2x^2 - 3x + 6 - (6 - x)$

$= 0{,}2x^2 - 3x + x$

$= 0{,}2x^2 - 2x \quad = x(0{,}2x - 2)$

⑥ La position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$ est donnée par le signe de la difference $d(x) = f(x) - h(x) = x(0{,}2x - 2)$

On fait un tableau de signe: $\quad 0{,}2x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{0{,}2} = 10$.

Donc

x		0		10	
x	$-$	0	$+$	|	$+$
$0{,}2x-2$	$-$	|	$-$	0	$+$
Produit	$+$	0	$-$	0	$+$

On déduit que sur $[0,10]$ $f(x) - h(x) < 0$ donc $\mathcal{C}_f$ en dessous de $\mathcal{C}_h$.

sur $]-\infty; 0[\cup]10, +\infty[$, on a $\mathcal{C}_f$ au dessus de $\mathcal{C}_h$.

VI On a $f(x) = (2\cos x - \sin x)(2\cos x + \sin x) - 3\cos^2 x$

$= 4\cos^2 x - \sin^2 x - 3\cos^2 x$

$= -\cos^2 x - \sin^2 x$

$= -1$

f est donc bien une f° constante

VII D'après l'énoncé
$$\begin{cases} 10a + 5b = 1050 \\ 12a + 8b = 1440 \\ 5a + 5b + 8c = 1810. \end{cases}$$

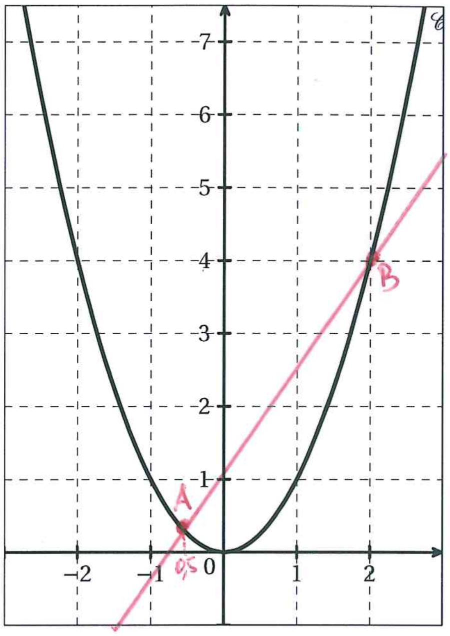
Avec la calculatrice, on déduit $a = 60$; $b = 90$; $c = 132{,}5$

Devoir N^o 14 : La totale (2h)

I (4 points)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction carrée définie par $f(x) = x^2$ et dont la représentation graphique est ci-contre. Soit A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$ et B celui d'abscisse 2.

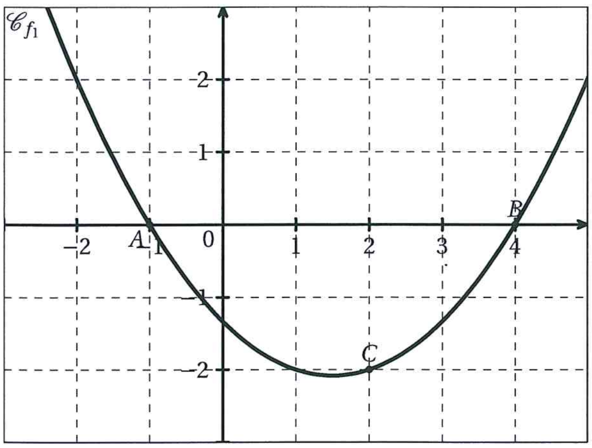
1. Représenter A et B sur le graphique.
2. Déterminer l'équation de la droite (AB).
3. Quelle est la distance AB ?

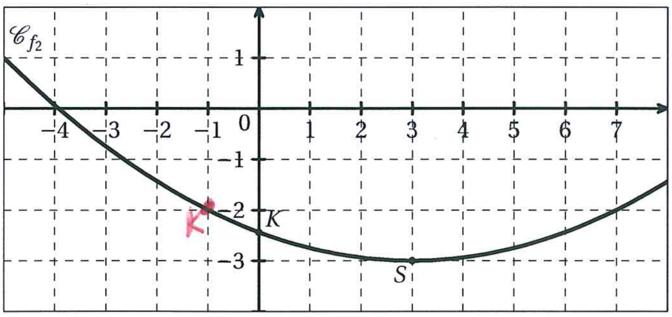


II (4 points)

Dans les graphiques ci-dessous on donne la représentation graphique de deux fonctions f_1 et f_2 polynômes de degré 2.
Nous avons A, B et C points de $\mathscr{C}_{f_1}$ et S,K points de $\mathscr{C}_{f_2}$.

1. Déterminer la fonction f_1. Vous l'écrirez sous la forme que vous désirez (développée, factorisée ou forme canonique).
2. Déterminer la fonction f_2. Vous l'écrirez sous la forme que vous désirez (développée, factorisée ou forme canonique).





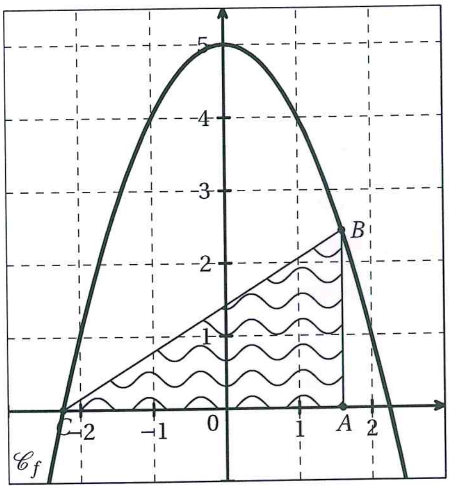
III (3 points)

1. Donner un encadrement de $\dfrac{1}{x}$ dans chacun des deux cas suivants.

   (E_1) : $-3 < x < -1$ | (E_2) : $2 < x < 7$

2. Donner un encadrement de $\dfrac{1}{x^2}$ lorsque $-5 < x < -2$.

(IV) (5 points)



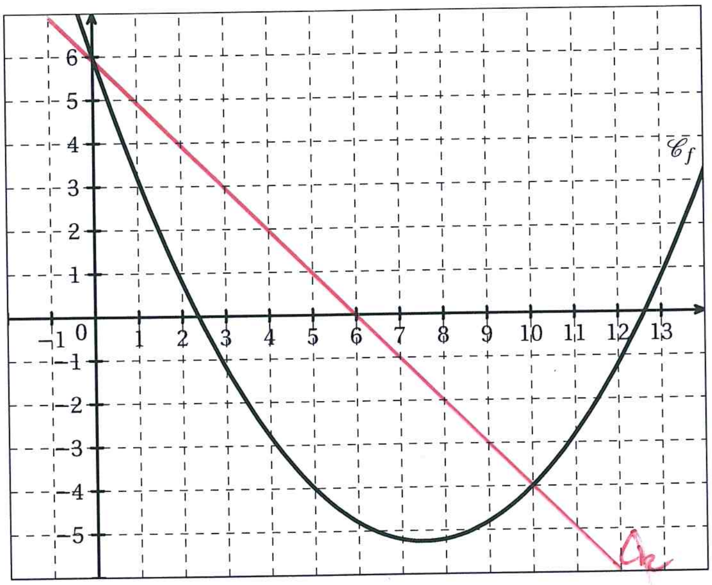
On définit la fonction f par $f(x) = 5 - x^2$ dont le graphe est sur la figure ci-contre. On note C le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses.
A est un point mobile de l'axe des abscisses situé entre les deux points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses. On note x l'abscisse du point A.
On construit alors le triangle rectangle ABC au dessus de l'axe des abscisses comme sur le graphique ci-contre.
Le but est de déterminer la position du point A pour que l'aire obtenue soit maximale. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire en fonction de x du ~~rect~~ tri angle $ABC\cancel{D}$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses.
2. Déterminer le domaine de définition de la fonction $\mathscr{A}$ (c'est-à-dire, quelles sont les valeurs possibles pour x).
3. Donner les coordonnées des points A, B et C puis la longueur AC et AB en fonction de x.
4. Déterminer l'expression de $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x. Quelle est la nature de cette fonction ?
5. A l'aide de la calculatrice, déterminer pour quelle valeur de x cette aire est maximale et préciser alors combien vaut cette aire.

(V) (6 points)

Dans le graphique ci-dessous on donne la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = 0.2x^2 - 3x + 6$.
On définit la fonction k par $k(x) = 6 - x$.

1. a) Quelle est la nature de f ? donner son tableau de variations.
   b) Quel est son minimum ?
2. Quelle est la nature de k ? Représentez k sur le graphique.
3. Résoudre graphiquement $f(x) < k(x)$.
4. a) Donner une forme factorisée de $f(x) - k(x)$.
   b) Quelle est la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_k$?



(VI) (3 points) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par l'expression ci-dessous est une constante que l'on déterminera.

$$f(x) = (2\cos x - \sin x)(2\cos x + \sin x) - \cancel{3}5\cos^2 x$$

VII **(3 points)** Une compagnie aérienne effectue des vols entre Madrid et 3 villes A,B et C. On note a, b et c le prix de chaque billet. On sait que

* 10 billets pour la ville A et 5 billets pour la ville B coûtent 1050 €
* 12 billets pour la ville A et 8 billets pour la ville B coûtent 1440 €
* 5 billets pour la ville A, 5 billets pour la ville B et 8 pour la ville C coûtent 1810 €

On souhaite déterminer les prix a, b et c.

1. Ecrire un système permettant de résoudre le problème.
2. Le résoudre à l'aide de la calculatrice.

VIII **(2 points)**
Dans cet exercice aucune justification n'est demandée

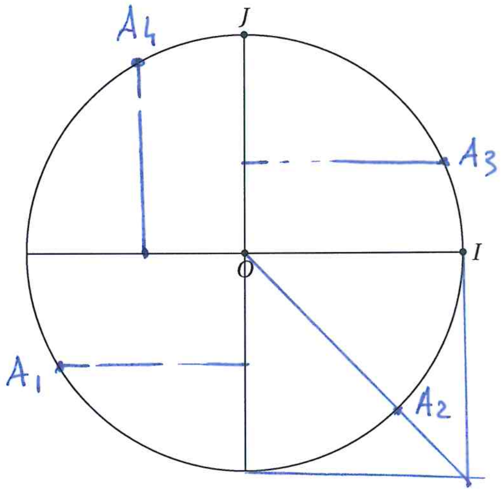
Sur le cercles trigonométrique ci-contre, placer les points A_i associé au réel donné.

A_1 associé à : $-\dfrac{5\pi}{6}$.

A_2 associé à : $\dfrac{39\pi}{4}$.

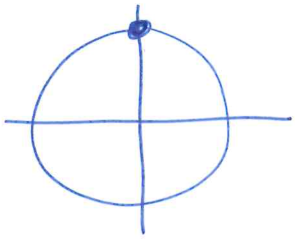
A_3 associé à : $\dfrac{1033\pi}{6}$.

A_4 associé à : $\dfrac{14\pi}{3}$.



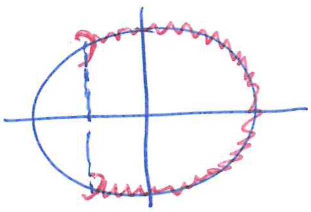
IX **(5 points)** Résoudre dans l'mtervalle indiqué.

I_1 : $\sin x = 1$ dans $[-2\pi; 2\pi]$.



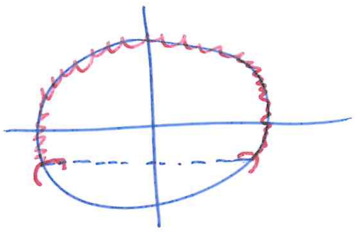
$S = \left\{ \frac{\pi}{2} ; -\frac{3\pi}{2} \right\}$

I_2 : $\cos x > -\dfrac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi]$.



$S = \left[0, \frac{2\pi}{3} \right[\cup \left] \frac{4\pi}{3} ; 2\pi \right]$

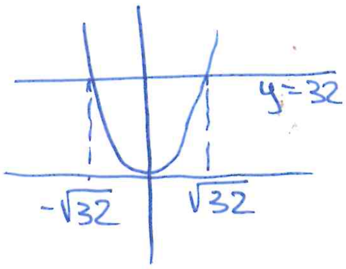
I_3 : $\sin x > -\dfrac{1}{2}$ dans $[-\pi; \pi]$.



$S = \left[-\pi ; -\frac{5\pi}{6} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{6} ; \pi \right]$

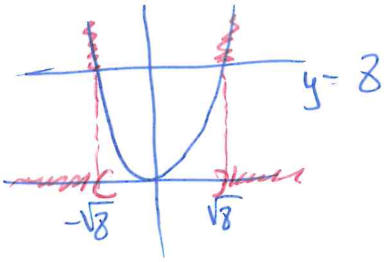
X **(6 points)** Résoudre en utilisant les propriétés des fonctions de référence les équations et inéquations suivantes :

$I_1 : \quad x^2 = 32$



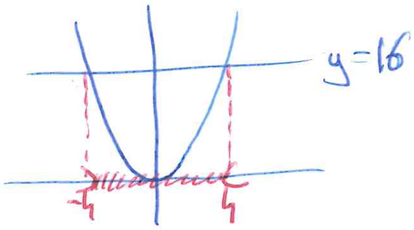
$$\boxed{S = \{-4\sqrt{2} \,;\, +4\sqrt{2}\}}$$

$I_2 : \quad x^2 > 8$



$$\boxed{S =]-\infty \,;\, -2\sqrt{2}[\,\cup\,]2\sqrt{2} \,;\, +\infty[}$$

$I_3 : \quad (x+3)^2 < 16$



$X^2 < 16 \Leftrightarrow X \in]-4;4[$

$(x+3)^2 < 16$

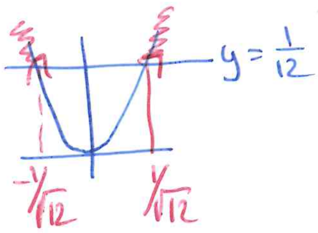
$\Leftrightarrow \quad -4 < x+3 < 4$

$\Leftrightarrow \quad -7 < x < 1$

$$\boxed{S =]-7 \,;\, 1[.}$$

$I_4 : \quad \dfrac{1}{x^2} < 12$

$\dfrac{1}{x^2} < 12 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > \dfrac{1}{12}$ car $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ ↓ sur $\mathbb{R}_+^*$



donc $S =]-\infty \,;\, -\dfrac{1}{\sqrt{12}}[\,\cup\,]\dfrac{1}{\sqrt{12}}, +\infty[$

et $\dfrac{1}{\sqrt{12}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ donc $\boxed{S =]-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{6}[\,\cup\,]\dfrac{\sqrt{3}}{6}, +\infty[}$