Devoir N^o 4 : Généralités sur les fonctions

I **(7 points)**

Soit f une fonction ayant le tableau de variation suivant :

x	-8		-4		3		5		7		8
$f(x)$	2	↗	6	↘	0	↘	-3	↗	0	↗	1

1. Quel est le domaine de définition D de f ?

$D = [-8;8]$

2. Comparer si possible $f(-1)$ et $f\left(-\frac{2}{3}\right)$

$-1 < -\frac{2}{3}$ et f décroissante sur $[-4;3]$ donc $f(-1) > f(-\frac{2}{3})$

3. Comparer si possible $f(-5)$ et $f(4)$

D'après le tableau $f(-5) \geqslant 2$ et $f(4) \leqslant 0$ donc $f(-5) \geqslant f(4)$

4. Comparer si possible $f(0)$ et $f(6)$

on a $f(0) \geqslant 0$ et $f(6) \leqslant 0$ donc $f(6) \leqslant f(0)$

5. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

on a $S = [-8;3[\cup]7;8]$

6. Combien 1 a-t-il d'antécédents ?

D'après le tableau, 1 admet 2 antécédents (8 et un autre dans $[-4;3]$)

7. Quel est le minimum de f sur D ?

Le minimum est -3 atteint en $x=5$

II **(4 points)** On donne l'algorithme suivant. Quel est son affichage ?

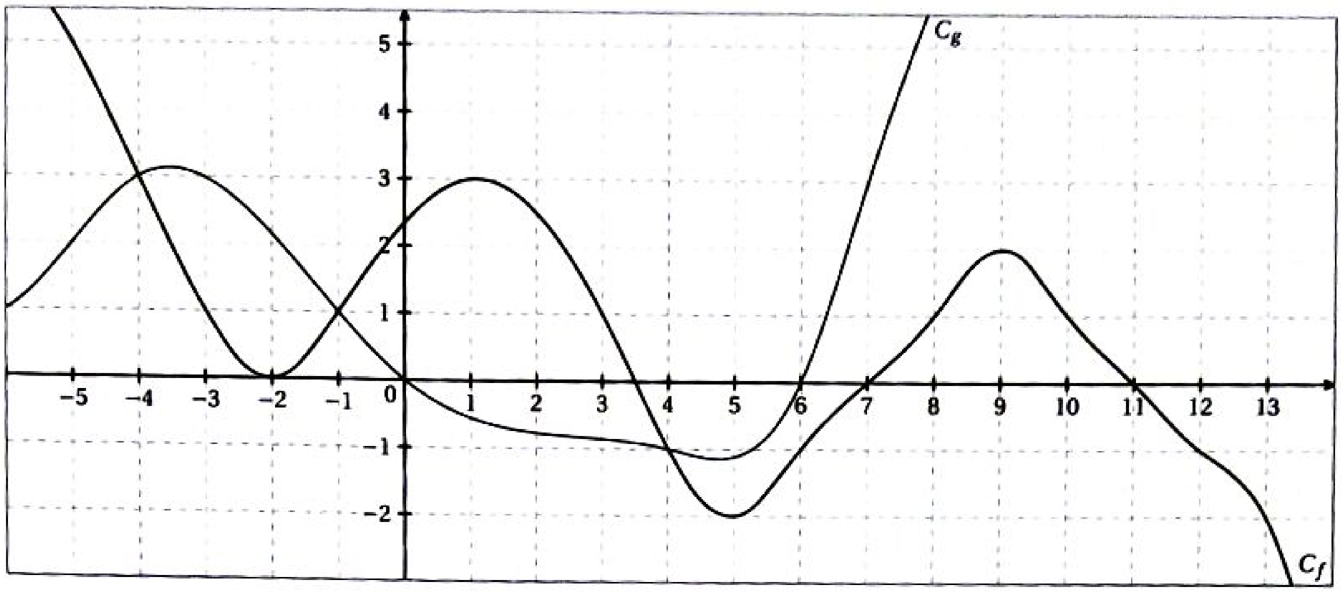
```
def teresa(x):
   return 2x+2

h=0.5
a=-1
while a=<2 :
  if teresa(a) >=2:
     print(a)
  print("/")
  a=a+h
```

...../ / 0 / 0,5 / 1 / 1,5 / 2 /.....

....

(III) **(12 points)** On a représenté les courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.



1. Déterminer les images par f de -1 et -2.

$f(-1) = 1$; $f(-2) = 0$

2. Déterminer les antécédents éventuels de 1, -1 par f.

Antécédents de 1 : $-3 ; -1 ; 3 ; 8 ; 10$; Antécédents de -1 : $4 ; 6 ; 12$.

3. Résoudre $f(x) = -1$.

$S = \{4 ; 6 ; 12\}$

4. Résoudre $f(x) \geq 1$.

$S =]-\infty ; -3] \cup [-1 ; 3] \cup [8 ; 10]$

5. Résoudre $f(x) < 3$.

$S =]-4 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

6. Résoudre $g(x) = f(x)$.

$S = \{-4 ; -1 ; 4\}$

7. Résoudre $f(x) < g(x)$.

$S =]-4 ; -1[\cup]4 ; +\infty[$

8. Dresser le tableau de variations de f sur $[-5; 13]$.

x	-5		-2		1		5		9		13
$f(x)$	5	↘	0	↗	3	↘	-2	↗	2	↘	-2

9. Dresser le tableau de signes de g.

x	-5		0		6		13
$g(x)$		+	0	−	0	+	

10. Déterminer selon les valeurs de k le nombres d'antécédents de k par f sur l'intervalle $]-\infty,1]$.

pour $k > 3$, on a un antécédent
pour $k \in]0 ; 3]$, on a deux antécédents
pour $k = 0$, on a un seul antécédent.
pour $k < 0$, il n'y a pas d'antécédent.

(IV) **(6 points)** *Cet exercice est à faire uniquement à la calculatrice, aucune justification n'est demandée.*
Soit les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4;3]$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ et $g(x) = -x^2 - 4x + 7$.
Déterminer :

1. L'ensemble des solutions de $f(x) > 0$.

$S =]-1{,}88 ; 0{,}34[\cup]1{,}53 ; +\infty[$

2. L'ensemble des solutions de $f(x) = g(x)$.

$S = \{1{,}39\}$

3. Le minimum de g.

g n'admet pas de minimum.

4. Le maximum de f sur $\mathbb{R}_-$.

Le maximum de f sur $\mathbb{R}_-$ est 3 atteint en $x = -1$

5. L'image de 3 par f

$f(3) = 19$

6. L'image de 0,345 par f.

$f(0{,}345) \approx 0{,}006$

(V) **(4 points)** Développer et réduire les expressions suivantes.

$A = (3x - 2y)^2 - 2(3x - 4)$

$= 9x^2 - 12xy + 4y^2 - 6x + 8$

$B = (x - 1)(x + 1) - 2 - (2x - 3)^2$

$= x^2 - 1 - 2 - (4x^2 - 12x + 9)$

$= -3x^2 + 12x - 12$

(VI) **(5 points)** Résoudre les équations suivantes directement sur la copie.

(E_1) : $4x + 5 = 0$

$S = \{-5/4\}$

(E_2) : $6x - 4 = -4 + 6x$

$S = \mathbb{R}$

(E_3) : $6x = 6x + 1$

$0 = 1$; $S = \emptyset$

(E_4) : $(2x + 7)(3 - 4x)(3x + 4) = 0$

$S = \{-\frac{7}{2} ; \frac{3}{4} ; \frac{-4}{3}\}$ (Règle du produit nul)

(E_5) : $2x^2 + 7 = 0$

$2x^2 = -7$ et un carré ne peut pas être négatif. $S = \emptyset$

VII **(3 points)** Montrer l'égalité suivante pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\frac{2x}{x-1} - 2 = \frac{2}{x-1}$$

VIII **(6 points)** Résoudre en factorisant :

(E_1) : $(2x-1)^2 - (x-1)(2x-1) = 0$

$(2x-1)\left[(2x-1)-(x-1)\right] = 0$

$(2x-1)(x) = 0$

$S = \{0 ; \frac{1}{2}\}$

(E_2) : $(2x+1)^2 - (x-7)^2 = 0$

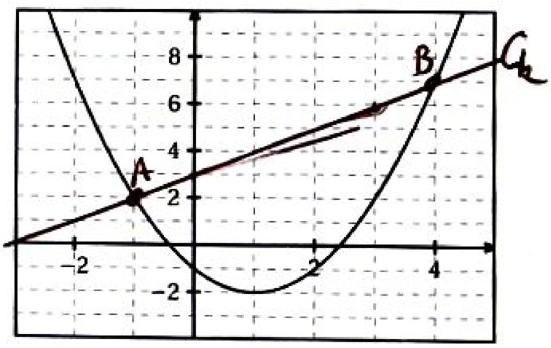
$(2x+1+x-7)(2x+1-x+7) = 0$

$(3x-6)(x+8) = 0$

$S = \{2 ; -8\}$

IX **(9 points)**

Attention, cet exercice est à traiter uniquement par le calcul. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 1$ dont vous trouverez le graphe ci-contre.



1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Les points suivants sont-ils des points de $\mathscr{C}_f$?
   a) $A(3;2)$ b) $B(-1{,}5;4)$
3. Déterminer les antécédents par f de -1.
4. On donne $k(x) = x + 3$.
   a) Préciser la nature de k et représenter k sur le graphique.
   b) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$ on a
   $$f(x) - k(x) = (x+1)(x-4)$$
   c) En déduire les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_k$.

X **(4 points)** On donne l'algorithme suivant. Quel est son affichage ?

```
n=6
Tant que n different de 1 :
  Si n pair faire :
    n = n/2
  Sinon :
    n=3n+1
  FinSi
  Afficher n
FinTantQue
```

3 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1

(Par curiosité, je vous invite à vous documenter sur la suite de Syracuse...)

VIII Pour $x \neq 1$:

$$\frac{2x}{x-1} - 2 = \frac{2x}{x-1} - \frac{2(x-1)}{x-1}$$

$$= \frac{2x - 2(x-1)}{x-1}$$

$$= \frac{2x - 2x + 2}{x-1}$$

$$= \frac{2}{x-1}$$

L'égalité est ainsi démontrée.

IX ① $D_f = \mathbb{R}$

② • $f(3) = 9 - 6 - 1 = 2$ donc $A(3;2) \in \mathcal{C}_f$.

• $f(-1{,}5) = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) - 1$

$= \frac{9}{4} + 3 - 1$

$= \frac{9}{4} + 2 = \frac{17}{4} \neq 4$ donc $B(-1{,}5;4) \notin \mathcal{C}_f$.

③ $f(x) = -1$

$x^2 - 2x - 1 = -1$

$x^2 - 2x = -1$

$x(x-2) = 0$ donc $x = 0$ ou $x = 2$

Les antécédents de -1 sont 0 et 2.

④ ⓐ h est une fonction affine $h(0) = 3$; $h(3) = 6$

et ceci permet de tracer la représentation de h

ⓑ On a $f(x) - h(x) = x^2 - 2x - 1 - (x+3)$

$= x^2 - 3x - 4$

et d'autre part

$$(x+1)(x-4) = x^2 + x - 4x - 4$$
$$= x^2 - 3x - 4$$

On a donc bien $f(x) - h(x) = (x+1)(x-4)$

© $M(x, y)$ point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$

ssi $f(x) = h(x)$

donc $f(x) - h(x) = 0$

$(x+1)(x-4) = 0$

$x = -1$ ou $x = 4$.

L'ordonnée est alors $h(-1) = -1+3 = 2$ et $h(4) = 7$.

Les points d'intersection sont $A(-1;2)$; $B(4,7)$