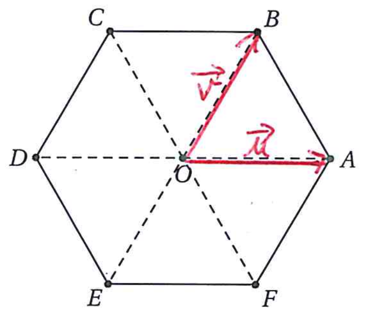
2^{nde} 4 *15 janvier 2019*

Devoir N^o 9 : Vecteurs (1h15)

I **(2 points)** Dans la figure ci dessous :

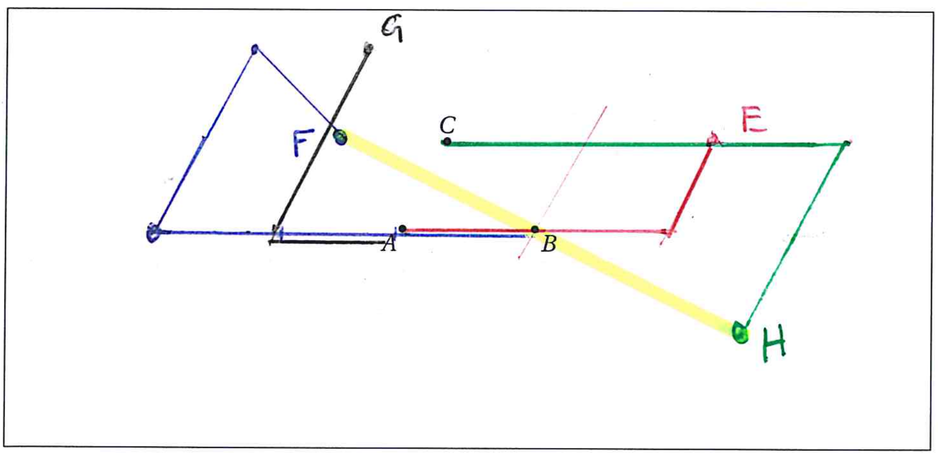


on pose $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
Exprimer, en utilisant uniquement les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les vecteurs suivants (complétez) :

- $\overrightarrow{EA} = \vec{u} + \vec{v}$
- $\overrightarrow{OF} = \vec{u} - \vec{v}$
- $\overrightarrow{ED} = \vec{v} - \vec{u}$
- $\overrightarrow{DF} = 2\vec{u} - \vec{v}$

$\overrightarrow{EA}$; $\overrightarrow{OF}$; $\overrightarrow{ED}$; $\overrightarrow{DF}$

II **(4 points)** On considère la figure ci-dessous :



1. Construire en laissant apparaitre les traits de construction les points E, F, G et H définis par :

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}; \qquad \overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}; \qquad \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}; \qquad \overrightarrow{CH} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$$

2. a) Démontrer, en utilisant la relation de Chasles, que $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BH} = \vec{0}$.
   b) Que peut-on en déduire ?

(III) **(5 points)** Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-2;1)$, $C(2;3)$, $D(1;0)$ et $M(0;7)$.
(Vous pourrez vous aider d'un rapide dessin ou brouillon pour vérifier la cohérence de vos calculs.)

1. Soit B le milieu de $[AM]$; calculer les coordonnées de B.
2. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
3. Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle et rectangle ; en déduire la nature exacte du quadrilatère $ABCD$.

(IV) **(9 points)**

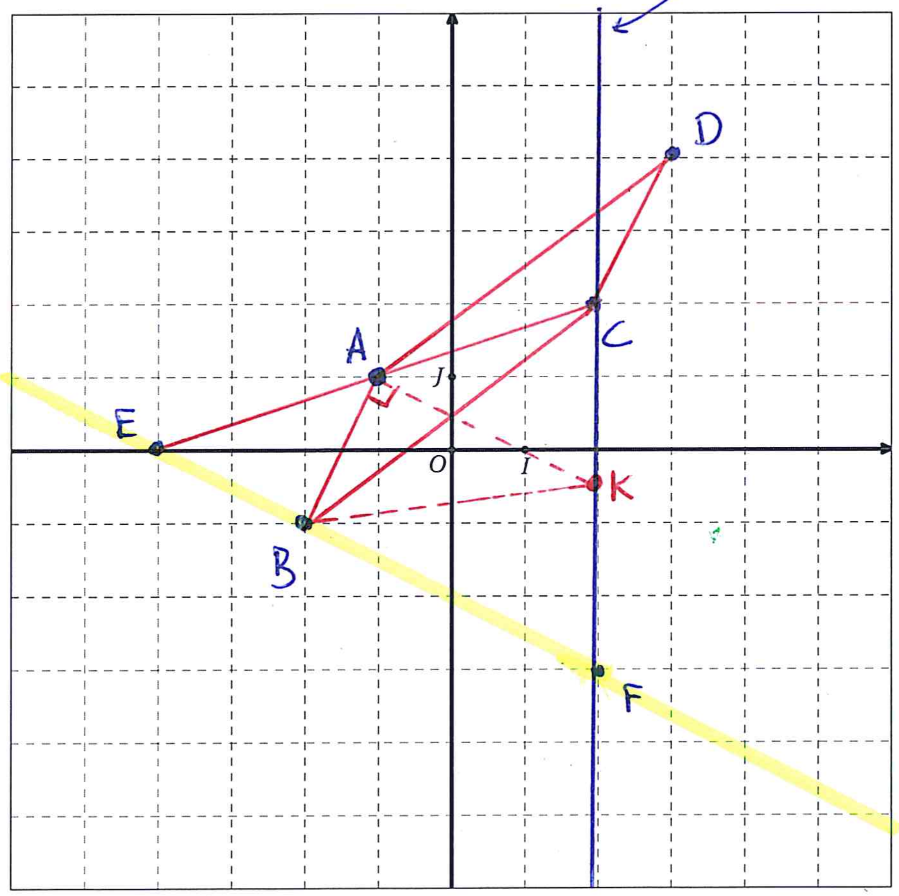
Soit $(O; I; J)$ un repère orthonormé du plan. $A(-1;1)$, $B(-2;-1)$, et $C(2;2)$. On complétera la figure au cours de l'exercice.

1. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées de E symétrique de C par rapport à A.
3. Déterminer les coordonnées de F vérifiant

$$\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}$$

4. Les points E,B,F sont-ils alignés ?
5. Soit $K(2; y)$ tel que ABK rectangle en A.
   a) Placer K sur le graphique.
   b) Déterminer K par le calcul.

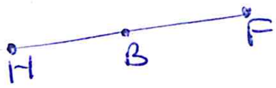
K est sur cette droite



DS 9 - Vecteurs.

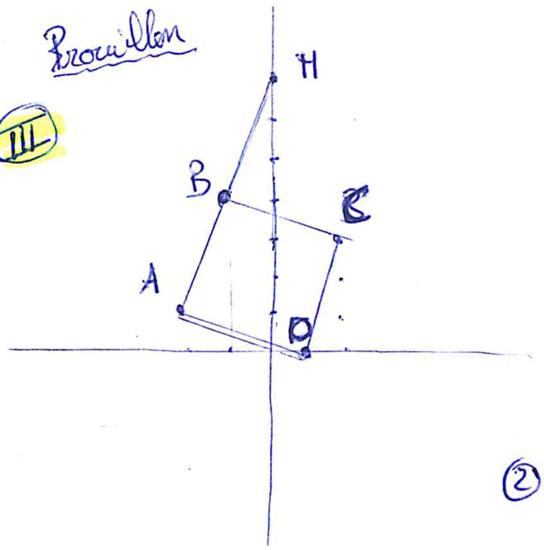
II ② ⓐ
$$\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BH} = \overbrace{3\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}}^{\overrightarrow{BF}} + \overbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CH}}^{\overrightarrow{BH}}$$
$$= 3\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AC} + \overset{\vec{0}}{\underbrace{3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{CH}}}$$
$$= \vec{0}.$$

②ⓑ On a donc $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BH}$
$= \overrightarrow{HB}$



et donc B milieu de [HF]

Brouillon



III

① B milieu de [AH]

donc $B\left(\frac{x_A+x_H}{2} ; \frac{y_A+y_H}{2}\right)$

donc $B(-1;4)$

② On a alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc ABCD parallélogramme.

③ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ donc $AB^2=10$.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ donc $BC^2=10$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ donc $AC^2=16+4=20$

Finalement $AB=BC=\sqrt{10}$ donc ABC isocèle

et $AC^2=AB^2+BC^2$ donc par réciproque du théorème de Pythagore ABC rectangle en B.

Donc ABC est rectangle isocèle en B.

On déduit que ABCD est un parallélogramme avec 2 côtés consécutifs égaux et un angle droit. C'est donc un carré.

IV ① Soit $D(x;y)$

ABCD parallélogramme ssi $\vec{AB} = \vec{DC}$ avec $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{DC}\begin{pmatrix}2-x\\2-y\end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} -1 = 2-x \\ -2 = 2-y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{donc } D(3;4)$$

② Soit $E(x;y)$

E symétrique de C par rapport à A

$\iff \vec{CE} = 2\vec{CA}$ avec $\vec{CE}\begin{pmatrix}x-2\\y-2\end{pmatrix}$ $\vec{CA}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x-2 = -6 \\ y-2 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{donc } E(-4;1)$$

③ Soit $F(x;y)$

$\vec{AF}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\end{pmatrix}$; $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$\vec{AF} = 2\vec{AC} + 3\vec{AB}$

$$\iff \begin{cases} x+1 = 6-3 \\ y-1 = 2-6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \quad \text{donc } F(2;3)$$

④ $\vec{EB}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{EF}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$

On a $\vec{EF} = 3\vec{EB}$ donc $\vec{EB}$ et $\vec{EF}$ colinéaires

donc E, B, F alignés.

5) a) $K(2;y)$ est sur la droite $x=2$

et on le place en construisant ABK rectangle en A.

Graphiquement $K(2;-\frac{1}{2})$

b) $K(2,y)$.

On a $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$; donc $AB^2=5$

$\vec{AK}\begin{pmatrix}3\\y-1\end{pmatrix}$ donc $AK^2 = 9+(y-1)^2$

$\vec{BK}\begin{pmatrix}4\\y+1\end{pmatrix}$ donc $BK^2 = 16+(y+1)^2$

ABK rectangle en A, donc d'après le th de Pythagore

$BK^2 = AB^2 + AK^2$

$\Leftrightarrow 16+(y+1)^2 = 5+9+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow 16+y^2+2y+1 = 14+y^2-2y+1$

$\Leftrightarrow 4y = -2$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$ donc $\boxed{K(2;-\frac{1}{2})}$