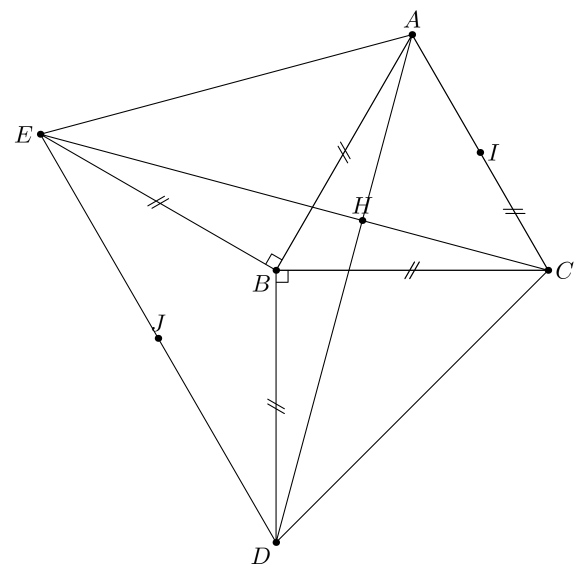
Classe de $2^{nde}3$ 13 octobre 2008

Devoir de Mathématiques N^o 3 (2 heures)

Les réponses seront soigneusement justifiées.

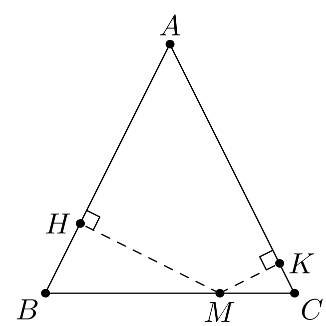
Exercice 1

ABC est un triangle équilatéral, CBD et ABE sont deux triangles rectangles isocèles en B. I est le milieu de $[AC]$ et J celui de $[ED]$. On note H le point d'intersection de $[AD]$ et $[EC]$.



1. On note R la rotation de centre B est d'angle 90° dans le sens direct.
   (a) Quelles sont les images de A et D par R ? (justifiez)
   (b) Démontrer alors que $CE = AD$ et que (EC) et (AD) sont perpendiculaires.
2. On se propose de démontrer le meme résultat à l'aide de la symétrie axiale d'axe (IJ) notée S.
   (a) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABI}$.
   (b) Démontrer que les points I, B, J sont alignés sur la médiatrice commune à $[AC]$ et $[DE]$.
   (c) A l'aide de S, montrer que $EC = AD$.
   (d) On trace le cercle $\mathscr{C}$ de centre B passant par A
      i. Pourquoi les points E, D, C appartiennent à $\mathscr{C}$?
      ii. Démontrer que $\widehat{EDA} = \widehat{CED} = 45°$.
      iii. En déduire que (EC) et (AD) sont perpendiculaires.

Exercice 2

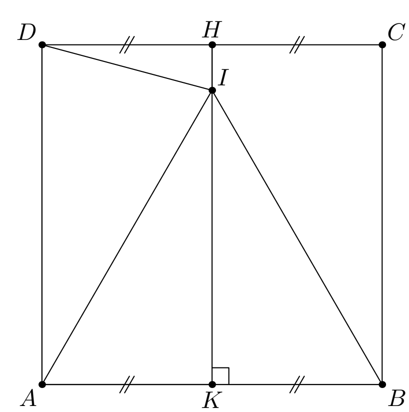


ABC est un triangle isocèle en A, et M est un point du segment $[BC]$.

1. Tracer la parallèle à (AC) passant par B. On note Δ cette droite. On note I, le point d'intersection de Δ et la droite (MK).
2. Démontrer que MHB et MIB sont isométriques
3. En déduire que la somme $MH + MK$ ne dépend pas de la position de M sur le segment $[BC]$.

Exercice 3

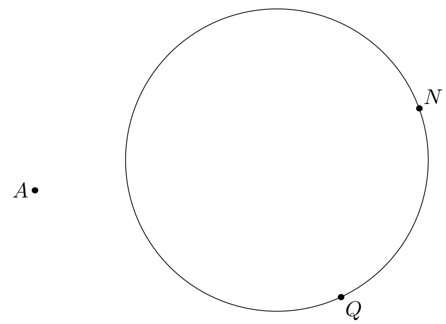
Soit ABCD un carré de côté 1. AIB est un triangle équilatéral. La médiatrice de [AB] et [DC] coupe [AB] en K et [DC] en H.



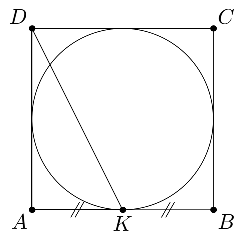
1. Montrer que H, K et I sont alignés.
2. (a) Démontrer que DAI est isocèle.
   (b) En déduire que $\widehat{HDI} = 15°$
3. (a) Calculer IK.
   (b) En déduire que IH=$1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
4. Démontrer que $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$.

Exercice 4

Soit $\mathscr{C}$ le cercle ci-contre de centre O et rayon R. N et Q deux points de $\mathscr{C}$ et A n'appartenant pas à $\mathscr{C}$. La droite (AN) recoupe $\mathscr{C}$ en M et (AQ) recoupe $\mathscr{C}$ en P.

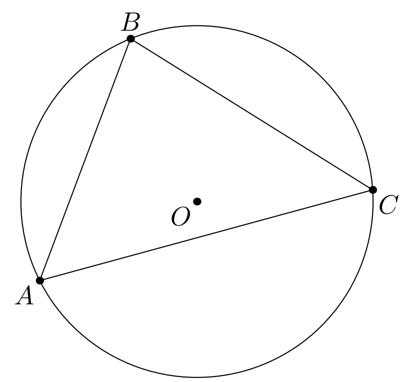


1. Compléter la figure.
2. Démontrer que AMQ et APN sont semblables.
3. En déduire que $AM \times AN = AP \times AQ$.
4. Refaire la figure dans le cas où (AQ) passe par le centre du cercle. Démontrer alors que $AM \times AN = AO^2 - R^2$.
5. Application : Dans la figure suivante calculer DM en fonction du côté a du carré.



Exercice 5

Soit ABC un triangle et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit de centre O et de rayon R. H est le pied de la hauteur issue de A et D le point diamètralement opposé à A sur $\mathscr{C}$. On note S l'aire du triangle ABC.



1. Compléter la figure.
2. Démontrer que AHC et ABD sont semblables.
3. En déduire $AB \times BC \times CA = 4RS$.

Exercice 6

Soit δ une droite et A un point qui n'appartient pas à cette droite. Soit M un point de Δ. On construit un triangle AMN direct rectangle isocèle en A.
Quel est le lieu des points N lorsque M décrit Δ ? Dessiner ce lieu.