2^3 Devoir de Maths n° 6. 2 décembre 2008

I ①

x		$-1/4$		0		$1/3$	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$1-3x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$4x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{x(1-3x)}{4x+1}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$

$1-3x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

$4x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$

Donc les solutions sont

$S = \left]-\frac{1}{4}; 0\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$

② $x^2-2x+1 \leq (x-5)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq (x-5)^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-(x-5)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-1+x-5)(x-1-x+5) \leq 0$

$\Leftrightarrow (2x-6)\times 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow 2x-6 \leq 0$ $(\div 4$ avec $4>0)$

$\Leftrightarrow 2x \leq 6$

$\Leftrightarrow x \leq 3$ $(\div 2$ avec $2>0)$.

$S =]-\infty; 3]$

③ $\frac{(x-3)^2}{(x-1)(3-2x)} \geq 0$.

Tableau de signes: $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$; $3-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

x		1		$3/2$		3	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$3-2x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$(x-3)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$\frac{(x-3)^2}{(x-1)(3-2x)}$	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$

$S = \left]1; \frac{3}{2}\right[\cup \{3\}$

④ $9x^3 < 25x \Leftrightarrow 9x^3-25x<0$

$\Leftrightarrow x(9x^2-25)<0$

$\Leftrightarrow x((3x)^2-5^2)<0 \Leftrightarrow x(3x-5)(3x+5)<0$

x		$-5/3$		0		$5/3$	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$3x-5$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$3x+5$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
Produit	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$S = \left]-\infty; -\frac{5}{3}\right[\cup \left]0; \frac{5}{3}\right[$.

II
$$\begin{cases} 3x+5<2 \\ -4x+16<0 \\ 11>-3x+5>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x<-3 \\ -4x<-16 \\ 6>-3x>-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 & (\div 3;\ 3>0) \\ x>+4 & (\div -4\ \ -4<0) \\ -2<x<2 & (\div -3;\ -3<0) \end{cases}$$

donc $S=\emptyset$ car $x<-1$ et $x>4$ impossible

III $f(x)=\dfrac{3x-4}{x+1}$

$0\leq x\leq 1 \Rightarrow 0\leq 3x\leq 3$ ($\times 3$ avec $3>0$)

$\Rightarrow -4\leq 3x-4\leq -1 \Leftrightarrow 4\geq 4-3x\geq 1$ (1) ($\times(-1)$; $-1<0$)

d'autre part $0\leq x\leq 1 \Rightarrow 1\leq x+1\leq 2$

$\Rightarrow 1\geq \dfrac{1}{x+1}\geq \dfrac{1}{2}$ (par inverse car les membres sont strictement positifs)

donc par produit avec 1

$4\geq \dfrac{4-3x}{x+1}\geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4\geq -f(x)\geq \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -4\leq f(x)\leq -\dfrac{1}{2}$ (par produit par $-1<0$)

IV ① On développe : $\forall x\in\mathbb{R}$, $(5x-3)(4-3x)=20x-12-15x^2+9x$

$=-15x^2+29x-12$

② $3x-5+\dfrac{x-7}{1-5x}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(3x-5)(1-5x)+x-7}{1-5x}<0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-15x^2-5+25x+x-7}{1-5x}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-15x^2+29x-12}{1-5x}<0$

③ On déduit $3x-5+\dfrac{x-7}{1-5x}<0 \overset{②}{\Leftrightarrow} \dfrac{-15x^2+29x-12}{1-5x}<0$

$\overset{①}{\Leftrightarrow} \dfrac{(5x-3)(4-3x)}{1-5x}<0$

Tableau de signes : $5x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$; $4-3x=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$

$1-5x=0 \Leftrightarrow x=1/5$.

x		$1/5$		$3/5$		$4/3$	
$1-5x$	+	0	−		−		−
$5x-3$	−		−	0	+		+
$4-3x$	+		+		+	0	−
$\frac{(5x-3)(4-3x)}{1-5x}$	−	‖	+	0	−	0	+

donc $S =]-\infty ; \frac{1}{5}[\cup]\frac{3}{5} ; \frac{4}{3}[$.

(V) $\sqrt{x}+x+1=0$.

le domaine de résolut° est $D=\mathbb{R}_+$

et si $x \in \mathbb{R}_+$ alors $\left.\begin{array}{l}\sqrt{x} \geqslant 0 \\ x \geqslant 0\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x}+x \geqslant 0$

$\Rightarrow \sqrt{x}+x+1 \geqslant 1$

donc pas de solut° .

car $\sqrt{x}+x+1=0$ impossible

(VI) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2 = 11+4\sqrt{6}$.

donc $\sqrt{3}+2\sqrt{2} = +\sqrt{11+4\sqrt{6}}$ ou $\sqrt{3}+2\sqrt{2} = -\sqrt{11+4\sqrt{6}}$.

et $\sqrt{3}+2\sqrt{2}>0 \Rightarrow \sqrt{3}+2\sqrt{2} = \sqrt{11+4\sqrt{6}}$.