2^3 Devoir N°7 16 décembre 2008

I ① $A = |2-5| + 5|3+4| - 2|4-9|$
$= 3 + 35 - 10 = \underline{28}$

② $B = |1-\sqrt{5}| - |-4-\sqrt{20}| + 2|3-\sqrt{5}|$
$= \sqrt{5} - 1 - (4+\sqrt{20}) + 2(3-\sqrt{5}) = \sqrt{5} - 1 - 4 - 2\sqrt{5} + 6 - 2\sqrt{5}$
$= \underline{1 - 3\sqrt{5}}.$

II ① $|3x+2| = |3-5x| \iff 3x+2 = 3-5x$ ou $3x+2 = 5x-3$
$\iff 8x = 1$ ou $2x = 5$

d'où $\underline{S = \left\{\frac{1}{8} ; \frac{5}{2}\right\}}.$

② $|2x-7| = 4x-5$

x		$7/2$	
$2x-7$	$-$	0	$+$
$\lvert 2x-7\rvert$	$7-2x$		$2x-7$

<u>Cas 1</u> : si $x < \frac{7}{2}$, $(E) \iff 7-2x = 4x-5$
$\iff 6x = 12 \iff x = 2 < \frac{7}{2}$
acceptée

<u>Cas 2</u> : si $x > \frac{7}{2}$; $(E) \iff 2x-7 = 4x-5$
$\iff 2x = -2 \iff x = -1 < \frac{7}{2}$
refusée

$\underline{S = \{2\}}.$

③ $|3x+5| + |9-5x| = 0$.
Une valeur absolue étant toujours positive, il faut donc $|3x+5| = 0$ et $|9-5x| = 0$
$\iff x = -\frac{5}{3}$ et $x = \frac{9}{5}$ impossible

d'où $\underline{S = \emptyset}$

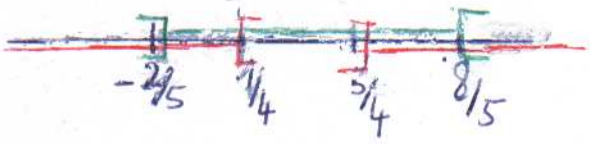
④ $|(x+1)^2 - 6| = 6 \iff (x+1)^2 - 6 = 6$ ou $(x+1)^2 - 6 = -6$
$\iff (x+1)^2 = 12$ ou $(x+1)^2 = 0$
$\iff x+1 = 2\sqrt{3}$ ou $x+1 = -2\sqrt{3}$ ou $x+1 = 0$
$\iff x = 2\sqrt{3} - 1$ ou $x = -2\sqrt{3} - 1$ ou $x = -1$

d'où $\underline{S = \left\{2\sqrt{3}-1 ; -2\sqrt{3}-1 ; -1\right\}}$

⑤ ⓐ (i) $|3-5x| < 5 \iff -5 < 3-5x < 5$
$\iff -8 < -5x < 2$
$\iff \frac{8}{5} > x > -\frac{2}{5}$ d'où $\underline{S = \left]-\frac{2}{5} ; \frac{8}{5}\right[}.$

(ii) $|4x-3| > 2 \iff 4x-3 > 2$ ou $4x-3 < -2$
$\iff 4x > 5$ ou $4x < 1$
$\iff x > \frac{5}{4}$ ou $x < \frac{1}{4}$ d'où $S = \left]-\infty ; \frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{5}{4} ; +\infty\right[$

ⓑ Les solut° du système est l'intersect° des deux intervalles précédents



donc $\underline{S = \left]-\frac{2}{5} ; \frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{5}{4} ; \frac{8}{5}\right[}$

III ① $(x-5)^2 \geqslant (x-5)(1-5x)$

$\Leftrightarrow (x-5)(x-5-(1-5x)) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(6x-6) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 6(x-5)(x-1) \geqslant 0$

x		1		5	
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
Produit	$+$	0	$-$	0	$+$

donc $S =]-\infty; 1[\cup]5; +\infty[$

② $(x^2+2x-1)^2 < (2x+5)^2$

$\Leftrightarrow (x^2+2x-1)^2 - (2x+5)^2 < 0 \Leftrightarrow [x^2+2x-1-2x-5][x^2+2x-1+2x+5] < 0$

$\Leftrightarrow [x^2-6][x^2+4x+4] < 0$

$\Leftrightarrow (x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})(x+2)^2 < 0$

x		$-\sqrt{6}$		-2		$\sqrt{6}$	
$x-\sqrt{6}$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+\sqrt{6}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x+2)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
Produit	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

d'où $S =]-\sqrt{6}; -2[\cup]-2; \sqrt{6}[$.

③ $(3x-4)^4 \leqslant 16 \Leftrightarrow [(3x-4)^2]^2 - 4^2 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow ((3x-4)^2-4)((3x-4)^2+4) \leqslant 0$

$\Leftrightarrow (3x-4-2)(3x-4+2)((3x-4)^2+4) \leqslant 0$

$\Leftrightarrow (3x-6)(3x-2)((3x-4)^2+4) \leqslant 0$

x		0		$\frac{2}{3}$		2	
$(3x-4)^2+4$	$+$		$+$		$+$		$+$
$3x-6$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$3x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
Produit	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$S =]\frac{2}{3}; 2[$

IV ① $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-1)(x^2+2x+1) = x^3+2x^2+x-x^2-2x-1$

$= x^3+x^2-x-1$

② $\dfrac{x^3+x^2-3}{x-2} \leqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^3+x^2-3}{x-2} - 1 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^3+x^2-3-x+2}{x-2} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x-2} \leqslant 0$

③ On déduit (E) $\overset{②}{\Leftrightarrow} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x-2} \leqslant 0 \overset{①}{\Leftrightarrow} \dfrac{(x-1)(x^2+2x+1)}{x-2} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(x+1)^2}{x-2} \leqslant 0$

x		-1		1		2	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{(x-1)(x+1)^2}{x-2}$	$+$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

donc $S = [1; 2[\cup \{-1\}$.