Devoir n°14 — 11 mai 200

(I) soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

donc $f(a) < f(b)$ car f croissante sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow (f(a))^2 > (f(b))^2$ car $x \longmapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et $f(a) < 0$; $f(b) < 0$

$\Rightarrow g(a) > g(b)$ d'où g décroissante sur $\mathbb{R}$.

(II) Soient $a, b \in [2, +\infty[$; $a < b$

on a donc $2 \leq a < b$

$\Rightarrow 0 \geqslant 4 - 2a > 4 - 2b$ car $x \longmapsto 4 - 2x$ décroissante sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow 0 \leq (4-2a)^2 < (4-2b)^2$ car $x \longmapsto x^2$ décroissante sur $\mathbb{R}_-$

$\Rightarrow 1 \geqslant 1 - 3(4-2a)^2 > 1 - 3(4-2b)^2$ car $x \longmapsto 1 - 3x$ décroissante sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(a) > f(b)$

Donc f décroissante sur $[2 ; +\infty[$

(III) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$;

(1) $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 et pour $x \in \mathbb{R}$,

$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = f(x)$ d'où f est impaire.

(2) $\frac{1}{2} - f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1+x^2 - 2x}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}$

or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1-x)^2 \geqslant 0$ et $1+x^2 > 0$ d'où $\frac{1}{2} - f(x) \geqslant 0$

Donc $f(x) \leq \frac{1}{2}$

d'autre part $f(1) = \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2}$ maximum de f atteint en $x = 1$.

(3) (a) $g(x) = \frac{1}{2}x$ est une fonction linéaire. Sa représentat° graphique est une droite passant par l'origine.

(b) La position relative de C_f et C_g est donnée par le signe de

$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}x$

$= \frac{2x - (x + x^3)}{1+x^2} = \frac{-x(x^2-1)}{1+x^2} = \frac{-x(x-1)(x+1)}{1+x^2}$

<u>Tableau de signes</u>

x		-1		0		1	
$-x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$-x(1+x)(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

On déduit

C_f au dessus de C_g sur $]-\infty ; -1] \cup [0 ; 1]$

C_f en dessous de C_g sur $[-1, 0] \cup [1 ; +\infty[$

IV ① a) NAM rectangle en M donc $\tan \widehat{AMN} = \dfrac{AN}{AM}$

BCM ——— en B donc $\tan \widehat{BMC} = \dfrac{BC}{BM}$

et $\widehat{AMN} = \widehat{BMC} \Rightarrow \dfrac{AN}{AM} = \dfrac{BC}{BM}$ d'où $\dfrac{1+DN}{2+x} = \dfrac{1}{x}$

$$\Rightarrow 1+DN = \frac{2+x}{x}$$

$$= \frac{2}{x} + 1 \Rightarrow DN = \frac{2}{x}.$$

b) $AI = AB + BI$

$= AB + \dfrac{x}{2} = 2 + \dfrac{x}{2}$

Le problème devient $AI = DN \iff 2 + \dfrac{x}{2} = \dfrac{2}{x}$.

2a) $2 + \dfrac{x}{2} = \dfrac{2}{x} \iff 4x + x^2 = 4$ ($\times 4x$ avec $x \neq 0$ car $x>2$).

$\iff x^2 + 4x - 4 = 0$

$\iff (x+2)^2 - 8 = 0$ car $(x+2)^2 - 8 = x^2 + 4x + 4 - 8$

$= x^2 + 4x - 4$.

b) $(x+2)^2 - 8 = 0 \iff (x+2)^2 - (2\sqrt{2})^2 = 0$

$\iff (x+2+2\sqrt{2})(x+2-2\sqrt{2}) = 0$

$\iff x = -2-2\sqrt{2}$ ou $x = 2\sqrt{2} - 2$

et $x = -2-2\sqrt{2} < 0$ est une solut° refusée ; $x = 2\sqrt{2} - 2 > 0$

Donc il faut choisir $x = 2\sqrt{2} - 2$.

V On a $(\vec{AC}, \vec{AD}) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$,

$(\vec{AB}, \vec{EB}) = 0 + 2k\pi$

$(\vec{CA}, \vec{CD}) = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

$(\vec{DE}, \vec{EA}) = +\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.