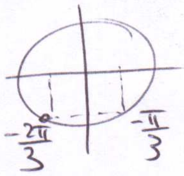
2^3

Devoir de mathématiques N°16

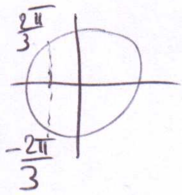
I ①

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



on a $S = \left\{ -\frac{2\pi}{3} ; -\frac{\pi}{3} \right\}$

② $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$;

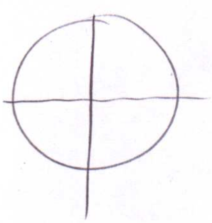


$\Leftrightarrow$

$2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{2\pi}{6} + k\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{6} + k\pi$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

d'où $S = \left\{ \frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} ; -\frac{\pi}{3} \right\}$

II ① $A(x) > 0 \Leftrightarrow \cos x > 0$

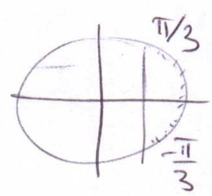


d'après le cercle trigonométrique, $\cos x > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$
$\cos x < 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \right.$

on a donc le tableau suivant sur $[-\pi, \pi]$

x	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		π
$\cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

② $B(x) > 0 \Leftrightarrow \cos x - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2}$



d'où d'après le cercle trigonométrique

$\cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right[$ et $\cos x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [-\pi, \pi] \setminus \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right]$

On a alors le tableau suivant

	$-\pi$		$-\pi/3$		$\pi/3$		π
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

③ $2\cos^2 x - \cos x < 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) < 0$

$\Leftrightarrow A(x)\,B(x) < 0$

donc d'après les tableaux précédents

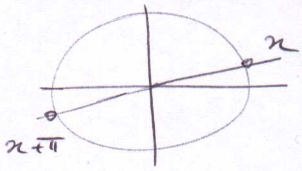
x	$-\pi$		$-\pi/2$		$-\pi/3$		$\pi/3$		$\pi/2$		π
$A(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$A(x)B(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Finalement

$S = \left]-\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3} ; \right.$

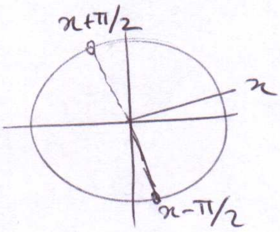
III $A(x) = \cos(49\pi + x) - \cos(78\pi + x)$

$= \cos(x+\pi) - \cos x = -2\cos x$



(et $\cos(x+2k\pi) = \cos$

$B(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

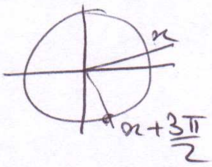


$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$= \sin x + \cos x$

$C(x) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) - \cos(x+\pi)$



$\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x$

$\cos(x+\pi) = -\cos x$

donc $C(x) = \sin x + \cos x$.

IV ① ⓐ les faces latérales sont des rectangles donc

$(BB') \perp (AB)$ et $(BB') \perp (BC)$.

d'autre part (AB) et (BC) sont deux droites sécantes du plan (ABC)

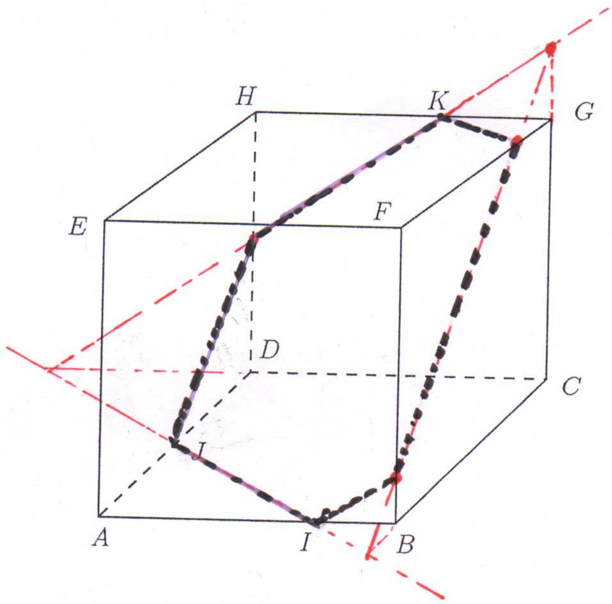
donc $(BB') \perp (ABC)$

ⓑ $\left.\begin{array}{l}(AH) \text{ droite de } (ABC) \\ (BB') \perp (ABC)\end{array}\right\} \Rightarrow (AH) \perp (BB')$

② ⓐ $\left.\begin{array}{l}(AH) \perp (BB') \quad (1b) \\ (AH) \perp (BC) \quad \text{par hypothèses} \\ (BC) \text{ et } (B'B) \text{ droites sécantes de } (BCC'B')\end{array}\right\} \Rightarrow (AH) \perp (BCC'B')$

ⓑ $\left.\begin{array}{l}(B'H) \text{ et } (C'H) \text{ droites du plan } (BCC'B') \\ (AH) \perp (B'C'CB)\end{array}\right\} \Rightarrow (AH) \perp (B'H) \text{ et } (AH) \perp (C'H)$

d'où les triangles AHB' et AHC' sont rectangles en H.


H
K
G
E
F
D
C
J
A
I
B