19 mai 2009

Devoir 2^{nde} 5

I ① $f(x) = x^2$; f est une fonction carrée.

② ⓐ pour $x \in \mathbb{R}$, $2(x+1)(x-2) = 2(x^2 + x - 2x - 2)$

$$= 2x^2 - 2x - 4.$$

ⓑ La position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est déterminée par le signe de la fonction

$$h(x) = f(x) - g(x)$$
$$= 2x^2 - 2x - 4$$
$$= 2(x+1)(x-2)$$

On dresse le tableau de signes :

x		-1		$+2$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc sur $]-\infty ; -1] \cup [2, +\infty[$, $h(x) > 0 \Rightarrow \mathcal{C}_f$ au dessus de $\mathcal{C}_g$.

sur $[1 ; 2]$; $h(x) < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_f$ en dessous de $\mathcal{C}_g$.

ⓒ $M(x, y)$ point d'intersect° de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g \iff f(x) = g(x)$ et $y = f(x)$

or $f(x) = g(x) \iff x = -1$ ou $x = +2$ d'après le tableau de signes

on déduit que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont pour point d'intersection $A(-1, f(-1))$ et $B(2, f(2))$

d'où $A(-1, 1)$ et $B(2, 4)$

③ $5 - g(x) = 5 - (-x^2 + 2x + 4)$

$$= x^2 - 2x + 1$$
$$= (x-1)^2$$

d'où pour $x \in \mathbb{R}$ $5 - g(x) \geq 0$ c'est-à-dire $g(x) \leq 5$

de plus $g(1) = 5$

Donc 5 maximum de g atteint en $x = 1$

II ⓐ pour $x \in D$; $2 + \dfrac{3}{1-7x} = \dfrac{2(1-7x)+3}{1-7x} = \dfrac{2-14x+3}{1-7x} = \dfrac{5-14x}{1-7x} = f(x)$

ⓑ Soient $a, b \in]\frac{1}{7}, +\infty[$; $a < b$

$$\frac{1}{7} < a < b$$

$\iff 0 > 1-7a > 1-7b$ car $x \mapsto 1-7x$ décroissante sur $\mathbb{R}$

$\iff \dfrac{1}{1-7a} < \dfrac{1}{1-7b}$ car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ——— $\mathbb{R}^*_-$

$\iff \dfrac{3}{1-7a} < \dfrac{3}{1-7b}$ ($\times 3$ avec $3 > 0$)

$\iff f(a) < f(b)$ d'où f est croissante sur $]\frac{1}{7}, +\infty[$

III • soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$

alors $f(a) < f(b) < 0$ car f croissante sur $\mathbb{R}$

d'où $-f(a) > -f(b) > 0$ $(\times(-1)$ avec $-1 < 0)$

$\Rightarrow 1 - f(a) > 1 - f(b) > 1$

$\Rightarrow g(a) < g(b)$ car $x \longmapsto \frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

donc g croissante sur $\mathbb{R}$

IV ① $\mathbb{R}^*$ symétrique par rapport à 0.

et pour $x \neq 0$ $k(-x) = (-x)^2 + 5 + \frac{1}{(-x)^2}$

$= x^2 + 5 + \frac{1}{x^2} = k(x) \rightarrow k$ paire

② $]0, +\infty[$ non symétrique $\Rightarrow f$ n'est ni paire ni impaire

V ① pour $x \in \mathbb{R}^*$

$f(x) - g(x) = -x^2 + x + 1 - \frac{1}{x}$

$= \frac{-x^3 + x^2 + x - 1}{x}$

d'autre par $-\frac{(x-1)^2(x+1)}{x} = -\frac{(x^2 - 2x + 1)(x+1)}{x}$

$= -(x^3 - 2x^2 + x + x^2 - 2x + 1) \times \frac{1}{x}$

$= -(x^3 - x^2 - x + 1) \times \frac{1}{x} = \frac{-x^3 + x^2 + x - 1}{x}$

donc l'égalité est vraie

② $f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geqslant 0. \Leftrightarrow -\frac{(x-1)^2(x+1)}{x} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x+1)}{x} \leqslant 0$

Tableau de signes

x		-1		0		1	
$(x-1)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{(x-1)^2(x+1)}{x}$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$

d'où

$S = [-1; 0[\cup \{0\}.$