2 juin 2009

# Devoir de mathématiques $2^5$

**I**

① g est une fonction affine dont la représentation graphique $C_g$ est une droite.

| $x$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | $-2$ | 0 |

② ⓐ pour $x \in \mathbb{R}$, $2(x-1)(x+2) = 2(x^2+2x-x-2)$

$= 2(x^2+x-2) = 2x^2+2x-4$

d'où l'égalité est vraie.

ⓑ La position relative de $C_f$ et $C_g$ est donnée par le signe de

$d(x) = f(x)-g(x)$

$= 2x^2+x-2-(-x+2)$

$= 2x^2+2x-4$

$= 2(x-1)(x+2)$ d'après ②ⓐ

On dresse alors le tableau de signes :

| $x$ | | $-2$ | | $+1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $2(x-1)(x+2)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

Finalement $C_f$ est au-dessus de $C_g$ sur $]-\infty;-2[\cup]1,+\infty[$.

et $C_f$ est en-dessous de $C_g$ sur $]-2;1[$.

ⓒ L'abscisse des points d'intersection satisfait $f(x)=g(x)$

d'où $f(x)-g(x)=0 \iff 2(x-1)(x+2)=0$

$\iff x=1$ ou $x=-2$

Les points d'intersection sont donc $A(1,g(1))$ et $B(-2,g(-2))$

c'est-à-dire $A(1,1)$ ; $B(-2;4)$

③ $f(x)-h(x) = 2x^2+x-2-(x-2)$

$= 2x^2$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)-h(x) \geqslant 0$ d'où $f(x) \geqslant h(x)$

et donc $C_f$ est toujours au-dessus de $C_g$.

De plus pour $x=0$, $f(x)=h(x)$ donc le point $C(0,f(0))$ est point de contact entre $C_h$ et $C_f$. On a $C(0,-2)$

**II** $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_5}) = \frac{8\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

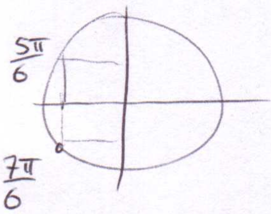
$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_6}) = \frac{27\pi}{6} + 2k\pi = \frac{24\pi}{6} + 2k\pi + \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_7}) = -\frac{34\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{2\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_8}) = \frac{93\pi}{3} + 2k\pi = 31\pi + 2k\pi = \pi + 2k\pi$

**III** 1) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

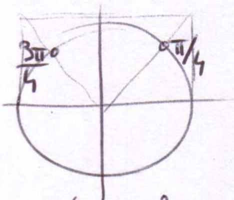
$S = \left\{\frac{5\pi}{6} ; \frac{7\pi}{6}\right\}$ sur $[0, 2\pi]$




$S = \left\{\frac{5\pi}{6} ; -\frac{5\pi}{6}\right\}$ sur $]-\pi ; \pi]$.

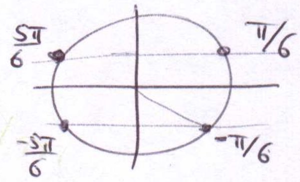
2) $\sin x = \pi$ ; $S = \emptyset$ car pour tout $x$, $\sin x \leq 1$.

3) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$




donc $S = \left\{\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right\}$ sur $[-\pi, \pi]$.

4) $(\cos x)^2 = \frac{3}{4} \iff \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

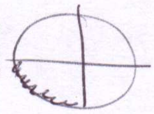



d'où $S = \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

**IV** $\cos x = \frac{3}{5}$ ; donc $\sin^2 x = 1 - (\cos x)^2$

$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

donc $\sin x = \frac{4}{5}$ ou $\sin x = -\frac{4}{5}$ or $\sin x < 0$ pour $x \in \left[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$



d'où $\sin x = -\frac{4}{5}$.

**V** $\sin x > -\frac{1}{2}$ donc sur $[-\pi, \pi]$ $S = \left[-\pi ; -\frac{5\pi}{6}\right[ \cup \left]-\frac{\pi}{6} ; \pi\right]$

ou sur $[0, 2\pi]$ $S = \left[0, \frac{7\pi}{6}\right[ \cup \left]\frac{11\pi}{6} ; 2\pi\right]$