

Nom :

1.6 S

14 Mars 2005

Devoir de Mathématiques N°7 (2 heures)

Barème approximatif : 1-4pts, 2-3pts, 3-2pts, 4-6pts, 5-4pts 6-2pts

Exercice 1. Dans un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points suivants définis par leurs coordonnées polaires : $A(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ $B(2, \frac{-\pi}{3})$ $C(3, -\pi)$ $D(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\pi}{2})$.

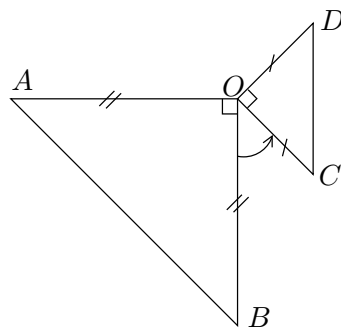
- Placez-les dans le plan (en laissant apparaître les traits de construction).
 - Déterminez leurs coordonnées cartésiennes de chacun d'eux.
-

Exercice 2.

- A partir de la valeur de $\cos \frac{\pi}{6}$, démontrer que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.
 - En déduire la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{12}$.
 - La calculatrice d'Adrian qui fait du calcul formel donne $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$. Est-ce bien le même nombre que celui donné au 1) ?
-

Exercice 3. OAB et OCD sont deux triangles rectangles et isocèle en O tels que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{4} (2\pi)$.

Montrer que les droites (AB) et (OD) sont perpendiculaires.



Exercice 4.

- Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$\cos x = -1$$

et précisez le signe de l'expression $Q(x) = 1 + \cos x$.

- Soit f définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$$

- Justifiez le domaine de définition de f .
- Montrez que f est une fonction 2π périodique.
- Montrez que f est une fonction paire.
- Pourquoi peut-on se contenter d'étudier f sur l'intervalle $[0, \pi[$?

3) On étudie désormais f sur l'intervalle $I = [0, \pi[$.

a) Calculez les valeurs ou limite aux bornes de I .

b) Déterminez la dérivée de f , et précisez son signe. Dressez ensuite le tableau de variation de f sur I .

c) Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que 2 cm représente π sur l'axe des abscisses et 1 cm représente une unité en ordonnées. Tracer f sur l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$.

Exercice 5.

1) Simplifier l'expression

$$A(x) = \sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi + x) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

2) Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'inéquation

$$2 \sin x + \sqrt{3} > 0$$

3) Résoudre l'équation suivante dans l'intervalle $I = [-\pi; \pi]$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

Exercice 6. Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$, et M est un point de coordonnées polaires (ρ, θ) appartenant au segment $[IJ]$. Montrer que l'on peut choisir θ dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$, et que l'on a :

$$\rho = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$$