

Devoir commun de mathématiques

Exercice 1 (5 points)

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé de l'espace, on considère les points $A(1; 0; -1)$, $B(3; 10; 2)$, $C(3; 7; 0)$ et les vecteurs $\vec{u}(1; 2; 0)$ et $\vec{v}(0; 4; 2)$. On pose $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$.

1. Démontrer que l'on peut définir un plan, que l'on notera \mathcal{P} , passant par le point O et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} .
2. Les points A , B , C appartiennent-ils au plan \mathcal{P} ?
3. Soit D le point tel que $\overrightarrow{CD} = -2\vec{i} - 10\vec{j} - 3\vec{k}$. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
4. Que peut-on dire de la droite (CD) par rapport au plan \mathcal{P} ? Justifier.
5. Que peut-on dire des plans (ABC) et \mathcal{P} ? Justifier.

Exercice 2 (3 points)

Soit les points $A(1; 3; 3)$, $B(5; 3; 7)$, $C(9; 3; 3)$, et $D(5; 3; -1)$.

1. A quel plan parallèle à un des plans de coordonnées ces quatre points appartiennent-ils?
2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.
3. Quelles sont les coordonnées du centre du losange?

Exercice 3 (12 points)

Soit $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$. On définit pour tout $x \in D$

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 3}$$

Soit \mathcal{C} la représentation géométrique de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On se propose d'étudier la fonction f sur D .

1. (a) Montrer que f est impaire.
 (b) Etudier les limites de f en $+\infty$ et $\sqrt{3}$ et préciser les asymptotes éventuelles.
 (c) En déduire les limites de f en $-\infty$ et $-\sqrt{3}$.
2. On note $g(x) = \frac{x}{x^2 - 3}$ définie sur D .
 (a) Vérifier que pour tout $x \in D$ on a $f(x) = x + g(x)$ et en déduire que \mathcal{C} possède une asymptote oblique Δ dont on précisera une équation.
 (b) Préciser la position relative de Δ et \mathcal{C} .
3. Soit P le polynôme $P(x) = x^4 - 7x^2 + 6$.
 (a) Factoriser P puis étudier le signe de P sur \mathbb{R} .
 (b) Démontrer que la dérivée f' de f vaut pour tout $x \in D$

$$f'(x) = \frac{P(x)}{(x^2 - 3)^2}$$

- (c) Dresser le tableau de variations de f .
4. Soit D la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
 (a) Déterminer l'équation de D .
 (b) Quel est l'angle en degrés arrondi à 10^{-1} formé par Δ et D ?
5. Tracer sommairement la courbe \mathcal{C} ainsi que ses asymptotes. (*Vous trouvez au dos un cadrillage prêt à l'emploi.*)

