Devoir de Mathématiques N^o 12 (2 heures)

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des suites suivantes, donner le sens de variation de la suite indiquée.

1. $u_n = \dfrac{3}{n^2}$
2. $u_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2n}$
4. $u_n = \dfrac{2^n}{n}$
5. $\begin{cases} u_0 = -3; \\ u_{n+1} = u_n + \sqrt{2}; \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 = -2; \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Exercice 2 (3 points)

Déterminer si les suites suivantes sont convergentes ou divergentes. Le cas échéant, préciser la limite de u_n.

1. $u_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$
2. $u_n = \dfrac{\cos(2n-1)}{n}$
3. $\begin{cases} u_0 = 3; \\ u_{n+1} = \dfrac{7}{4}u_n; \end{cases}$
4. $\dfrac{(-2)^n + 5^n}{3^n + 4 \times 5^n};$

Exercice 3 (3 points)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

Soit f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$.

1. Etudier les variations de f.
2. (a) Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-joint (unité graphique 5 cm) la courbe $\mathscr{C}$ représentant f et la droite Δ.
   (b) Sur l'axe des abscisses, représenter u_0, u_1, u_2, u_3..
   (c) Quelle conjecture peut-on donner sur le sens de variation de la suite (u_n) ?
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

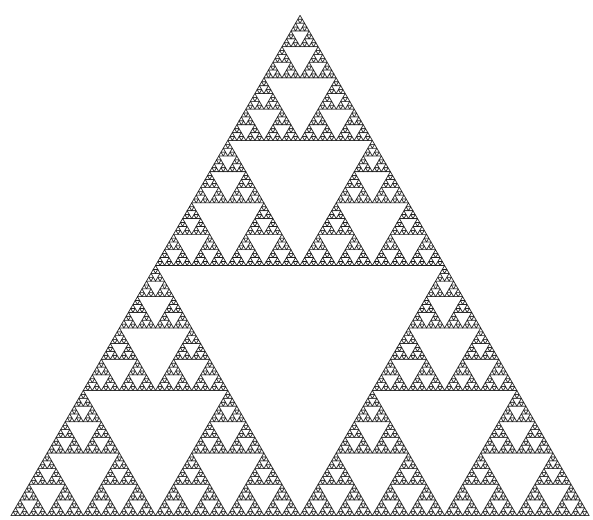
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.
   (b) En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.
   (c) Dé

Exercice 4 (3 points)

On part d'un traiangle équilatéral de coté a tou noir. On le partage en 4 triangle équilatéraux obtenus en joignant les milieux des côtés du triangle initial et on colorie en blanc le triangle central.
À l'étape suivante, chaque triangle noir est à son tour partagé en quatre triangles égaux suivant le même principe, et chaque nouveau triangle centrale est peint en blanc.

Après sept étapes, la figure obtenue est donnée ci-contre.
Dans tout l'exercice, n est un entier naturel strictement positif.



1. On note a_n l'aire de la surface noire après n étapes. Calculer a_1, a_2, et a_3.
2. On note p_n le nombre de triangles noir lors de la n-ième étape et c_n la longueur de leurs côtés.
   Montrer que les suite (p_n) et (c_n) sont des suites géométriques dont on donnera les éléments caractéristiques.
3. Exprimer l'aire d'un triangle noir à l'étape n. En désuire l'aire a_n de la surface noire au bout de n étape.
4. Étudier la convergence de la suite (a_n) et sa limite éventuelle..