Devoir de Mathématiques N^o 15

Exercice 1 (7 points)

Dans une urne on dispose de cinq boules indiscernables au toucher : trois vertes numérotées de 1 à 3 et deux rouges numérotées de 0 à 5.

Règle du jeu : Le joueur paye a € pour faire une partie. La partie consiste à tirer successivement deux boules au hasard, en remettant la première boule dans l'urne pour le second tirage. Si les deux boules tirées sont de même couleur, la partie est perdue. Sinon, le joueur remporte le montant en euros égal au nombre formé en prenant le chiffre de la boule verte pour les dizaines et celui de la boule rouge pour les unités (ainsi le tirage vert 2 et rouge 5 remporte 25 €). Soit X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (prix de la partie inclus).

1. (a) Donner la loi de probabilité de la variable X.
   (b) Quelle valeur choisir pour a pour que le jeu soit équitable. Quel est alors l'écart type de X ?
2. On fait l'hypothèse où le jeu est équitable.
   (a) Calculer la probabilité de l'évènement A : « Le joueur réalise un gain positif strictement »
   (b) Calculer la probabilité de l'évènement B : « Le joueur réalise un gain impair »
3. (a) Le joueur fait 5 parties de suite. Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une fois ?

Exercice 2 (7 points)

Le code de la porte d'entrée d'un immeuble est composé d'une lettre et de deux chiffres (par exemple A02, G40 ou U23). On rappelle que l'alphabet comporte 26 lettres dont 6 voyelles : A,E,I,O,U, et Y.

On choisit un code au hasard.

1. Décrire (sans l'expliciter) l'univers Ω de cette expérience aléatoire. Quel est le cardinal de Ω ? (on pourra éventuellement imaginer un arbre).
2. Quelle est la probabilité des évènements suivants :
   (a) A : « La lettre est un S »
   (b) B : « Il y a au moins un chiffre impair dans le code. »
   (c) C : « La lettre est une voyelle. »
   (d) D : « Le code contient une voyelle ou au moins un chiffre impair. »

Exercice 3 (4 points)

Soit $ABCD$ un trapèze de base $[AB]$ et $[CD]$. Soit I le milieu de $[AB]$ et J le milieu du segment $[CD]$. Soit K le point d'intersection des droites (AD) et (CB), et L celui des droites (AC) et (BD) (voir figure ci contre).

1. (a) Montrer qu'il existe une homothétie h de centre K telle que $h(A) = D$.
   (b) Quelle est l'image de B par h (justifiez).
   (c) Quelle est l'image de I par h (justifiez).
   (d) En déduire que K, I et J sont alignés.
2. En introduisant une homothétie de centre L adéquate h_2, montrer de même que L, I et J sont alignés.
3. En déduire que K, I, L et J sont alignés.