Classe de 1S4 *Le 24 Janvier 2006*

Devoir de Mathématiques $N°7$ (2 heures)

Exercice 1 (7 points)

Soit f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Donnez-en le cas échéant interprétation graphique.
3. On rappelle la formule $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ valable lorsque u est dérivable et strictement positif.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée f'.
   (b) Montrer que f est stictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
4. (a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   (b) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.
5. Déterminer l'équation de la tangente D à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
6. Représenter sommairement D, Δ et $\mathscr{C}$.

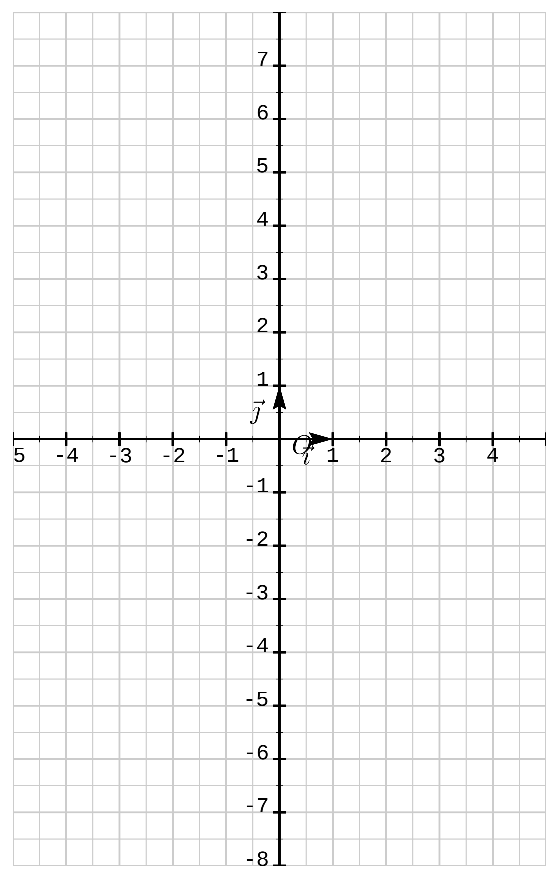
Exercice 2 (9 points)

Soit f définie pour tout $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$$

$\mathscr{C}$ sa représentation graphique sans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les limites de f aux bornes en -1, $+\infty$ et $-\infty$. Précisez le cas échéants les asymptotes à $\mathscr{C}$.
2. (a) Justifier la dérivabilité de f sur D et montrer que pour tout $x \in D$ on a
   $$f'(x) = \frac{x^4+4x^3+3x^2}{(x+1)^4}$$
   (b) Etudier son signe et dresser le tableau de variation de f. Vous préciserez les extremums locaux et les abscisses pour lesquelles la tangente est horizontale.
3. (a) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x+1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Etudier la position relative de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$.
4. Représenter sommairement $\mathscr{D}$, Δ et $\mathscr{C}$ dans le repère ci-joint.



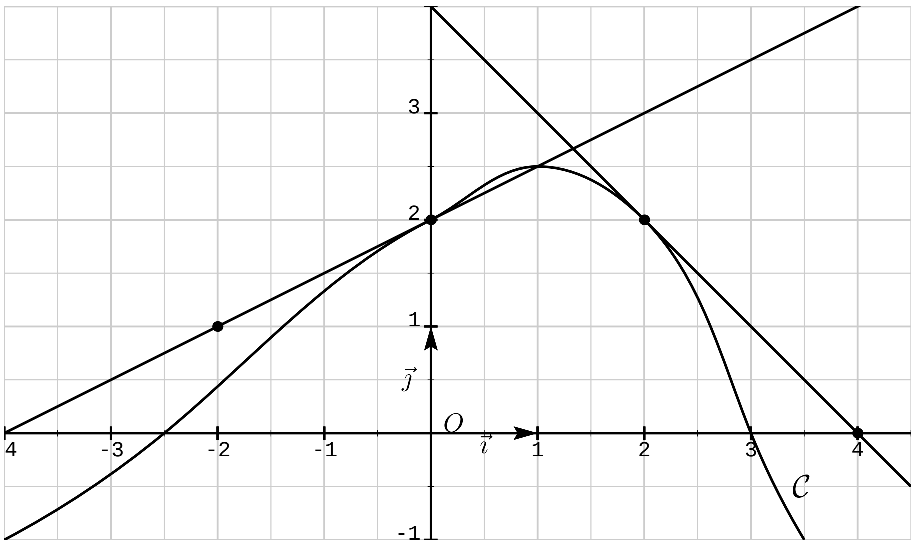
Exercice 3 (3 points)

1. Etudier les limites suivantes :
   (a)
   $$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1}$$
   (b)
   $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x^2+x}-2}{x-1}$$
2. **Bonus (1 point) :** En déduire la limite
   $$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{\sqrt{3x^2+x}-2}$$

Exercice 4 (2 points)

Le graphique ci-joint représente dans un repère orthonormal la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Les droites représentées sont des tangentes à la courbe $\mathscr{C}$.

Pour chaque question une seule réponse est correcte. Une bonne réponse vaut $0,5$ point. Une mauvaise réponse pénalise de 0,25 point. En aucun cas la note de l'exercice ne peut être négative.



Question 1. On a $f'(x) \geq 0$ sur

☐ $[-1;4]$ ☐ $[-2,5;3]$ ☐ $]-\infty;1]$ ☐$[0;3]$ ☐ $[0;+\infty[$

Question 2. On a $f'(0) =$

☐ 1 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ -1 ☐0

Question 3. Soit $u(x) = \frac{1}{f(x)}$ sur $]-1;1[$ alors $u'(0) =$

☐ 1 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ -1 ☐0 ☐ $-\frac{1}{8}$ ☐$\frac{1}{8}$ ☐ $-\frac{1}{4}$ ☐$\frac{1}{4}$

Question 4. L'approximation affine de f en 2 est donnée pour h voisin de 0 par $f(2+h) \simeq$

☐ $-h+1$ ☐ $-h-1$ ☐ $h+1$ ☐ $-h+2$ ☐ $2h+2$