

Devoir de Mathématiques N° 12 (1 heure)

Exercice 1 (17 points)

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + x + 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* . On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les représentations graphiques des deux fonctions dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal. On a représenté ces courbes dans le repère ci-joint.

1. Etude graphique

- (a) Sans justifier, résoudre graphiquement $g(x) < 1$.
- (b) Résoudre graphiquement en justifiant l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.
- (c) Déterminer avec la précision permise par le graphique le maximum de f sur \mathbb{R} .

2. Etude algébrique de la position relative de f et g

- (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$f(x) - g(x) = -\frac{(x-1)^2(x+1)}{x}$$

- (b) En déduire la résolution de l'inéquation

$$f(x) \geq g(x)$$

puis la position relative de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

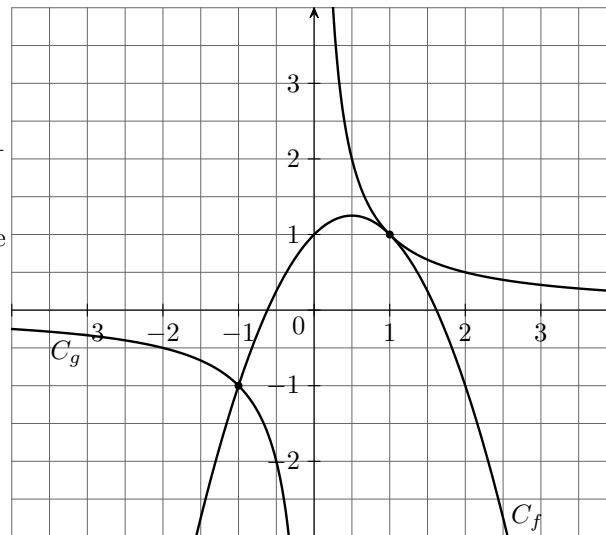
- (c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

3. Etude algébrique de la fonction f

- (a) Soit $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que

$$f(x) - f(y) = (y - x)(y + x - 1)$$

- (b) On suppose $x < y$ et $x, y \geq \frac{1}{2}$, quel est alors le signe de $f(x) - f(y)$? Que peut-on en déduire pour f ?
- (c) On admet que f est croissante sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$. Dresser le tableau de variation de f .
- (d) Démontrer par le calcul que $\frac{1}{4}$ est le maximum de f .
- (e) Quels sont les antécédents par f de 1?
- (f) Quels sont les antécédents par f de 2?



Exercice 2 (3 points)

Soit h , une fonction définie sur \mathbb{R} telle que :

- h est décroissante sur $]-\infty; -2]$ et sur $]\frac{1}{2}; 2]$.
- h est croissante sur $]-2; \frac{1}{2}]$ et sur $]2; +\infty[$.
- -3 est le minimum pour h sur \mathbb{R} atteint pour $x = -2$.
- $h(-4) = 1, 5$; $h(\frac{1}{2}) = 4$; $h(2) = -2$ et $h(3) = -1$.
- L'équation $h(x) = 0$ a pour solutions $-3, -1$ et 1 .
- Pour $x \in]-\infty; -3[$ on a $h(x) < 3$.
- Pour $x \in [3; +\infty[$ on a $h(x) < 0$.

Construire une courbe représentative de h possible dans un repère orthonormé.