

Devoir de Mathématiques N° 5 (1 heure)



Pas de calculatrice !

Exercice 1

 _____ (4 points)

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(5x - 3)(4 - 3x) = -15x^2 + 29x - 12$.
2. Démontrer que

$$3x - 5 + \frac{x - 7}{1 - 5x} < 0 \iff \frac{-15x^2 + 29x - 12}{1 - 5x} < 0.$$

3. En déduire, la résolution de

$$3x - 5 + \frac{x - 7}{1 - 5x} < 0$$

Exercice 2

 _____ (2 points)

Résoudre dans \mathbb{R} :

$$\frac{2(x - 1)^2}{3 - 2x} < 0$$

Exercice 3

 _____ (3 points)

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle \mathcal{C} de centre O. On note I, J, K les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB].

1. Démontrer que (OI) et (KJ) sont perpendiculaires.
2. En déduire que O est l'orthocentre de IJK.

Exercice 4

 _____ (5,5 points)

Soit \mathcal{C} un cercle de centre O et diamètre [BC].

A est un point de \mathcal{C} .

La tangente au cercle en B coupe (CA) en E.

La tangente au cercle en A coupe (BE) en D.

1. Démontrer que DA=DB (*utiliser Pythagore*)
2. Que représente la droite (OD) pour le segment [AB] ?
3. Montrer que les droites (CE) et (DO) sont parallèles.
4. Quelle est la position du point D sur le segment [EB] ? Justifier.

Exercice 5

 _____ (5,5 points)

Soit ABCD un carré de côté 1. AIB est un triangle équilatéral. La médiatrice de [AB] et [DC] coupe [AB] en K et [DC] en H.

1. (a) Démontrer que DAI est isocèle.
(b) En déduire que $\widehat{HDI} = 15^\circ$
2. (a) Calculer IK.
(b) En déduire que $IH = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Démontrer que $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.