

# Devoir de Mathématiques N° 7 (2 heures)



Les réponses doivent être justifiées. Le barème est purement indicatif.

## Exercice 1 \_\_\_\_\_ ( 5 points )

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $(2x - 5)^4 \leq 16$

2.  $\frac{5x+1}{x^2-4} \leq \frac{3}{x-2}$

3.  $\frac{x+1}{3-x} \leq x$

## Exercice 2 \_\_\_\_\_ ( 1 points )

Quel est le nombre de solution dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $x^4 + 5x^2 + 1 = 0$  ?

## Exercice 3 \_\_\_\_\_ ( 3 points )

Dans la figure ci-contre, ABCD est un rectangle,  $M \in [AD]$ ,  $N \in [AB]$ ,  $AD = 10 \text{ cm}$ ,  $AB = 4 \text{ cm}$ ,  $BN = x$ ,  $MD = 2x$ .

1. A quel intervalle  $x$  peut-il appartenir ?
2. Démontrer que l'aire du triangle MNC est de  $20 - x^2 \text{ cm}^2$
3. Déterminer pour quelles valeurs de  $x$  l'aire du triangle MNC est inférieure à  $16 \text{ cm}^2$ .

## Exercice 4 \_\_\_\_\_ ( 2,5 points )

Dans la figure ci-contre, les points B et C sont sur le cercle de diamètre [AD] et de centre O et tels que  $AB=AO$  et BOC triangle rectangle direct. On note I le point d'intersection de (BD) et (CA).

1. (a) Démontrer que les triangles BIC et AID sont semblables.  
(b) Calculer BC en fonction du rayon R du cercle. En déduire que le rapport d'agrandissement est de  $\sqrt{2}$ .
2. Démontrer que l'aire de AID est le double de celle de BIC.

## Exercice 5 \_\_\_\_\_ ( 3 points )

Soit ABCD un carré; I et H les milieux respectifs des côtés [AD] et [DC]. K le point d'intersection de (IB) et (AH).

1. Montrer que AIK et AIB sont semblables.
2. Etablir le rapport de similitude entre AIK et AIB.
3. En déduire le rapport  $\frac{\mathcal{A}(AIK)}{\mathcal{A}(ABCD)}$  des aires de AIK et ABCD.

## Exercice 6 \_\_\_\_\_ ( 2 points )

Soit  $\mathcal{D}$  une droite et  $A \notin \mathcal{D}$ . A tout point  $M$  de la droite  $\mathcal{D}$ , on construit les points  $N$  et  $M'$  tels que AMNM' soit un carré direct.

1. Faire une figure.
2. Déterminer le lieu des points  $M'$  lorsque  $M$  décrit la droite  $\mathcal{D}$  (ind : Quelle est la transformation qui transforme  $M$  en  $M'$  ?).
3. Dessiner alors cet ensemble.

## Exercice 7 \_\_\_\_\_ ( 3,5 points )

Soit ABCD un parallélogramme de centre O et M un point de (AB). La droite (OM) coupe (CD) en P et la perpendiculaire à (MP) en O coupe (AD) en N et (BC) en Q. On note  $s$  la symétrie de centre O.

1. (a) Quelle est l'image de (AB) par  $s$  ?  
(b) Quelle est l'image de (MP) par  $s$  ?  
(c) En déduire l'image de M par  $s$ .
2. (a) Quelle est l'image de (AD) et (NQ) par  $s$  ?  
(b) En déduire l'image de N.
3. Déduire des questions précédentes que MNPQ est un losange.