TS

Devoir de spécialité N°2

19 Nov. 2008

I $9668622 = 11\times 878965 + 7$

Donc par compatibilité de la congruence avec la puissance, on a $9668622^{14548} \equiv 7^{14548}\ (11)$

$7^2 \equiv 49 \equiv 5\ (11)$
$7^3 \equiv 2\ (11)$
$7^4 \equiv 14 \equiv 3\ (11)$
$7^5 \equiv -1\ (11) \Rightarrow 7^{10} \equiv 1\ (11)$ (Nous verrons que c'est un résultat immédiat avec le petit thm de Fermat)

finalement $A = 7^{14548} \equiv 7^{1454\times 10+8}\ (11)$

$\equiv \left(7^{10}\right)^{1454} \times 7^8\ (11)$

$\equiv 7^8 \equiv (7^4)^2 \equiv 3^2 \equiv 9\ (11)$

Le reste de la division de A par 11 est 9

II $\overline{x2y}^{6} = \overline{3x2}^{5} \iff 36x + 12 + y = 3\times 25 + 5x + 2$ et $0 \le y < 6$, $0 \le x < 5$

$\iff 31x + y = 65$

avec $x = 2$ et $y = 3$ ça marche.

On a alors $\overline{223}^{6} = \overline{322}^{5}$

III ① si $n \equiv a\ (8)$ alors par compatibilité de la congruence avec le produit on a $n^2 \equiv a^2\ (8)$ d'où le tableau de congruences.

$n \equiv\ (8)$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 \equiv\ (8)$	0	1	4	1	0	1	4	1

② ⓐ $(n+4)^2 - 4 \equiv 0\ (8) \iff (n+4)^2 \equiv 4\ (8)$

$\iff n+4 \equiv 2\ (8)$ ou $n+4 \equiv 6\ (8)$ d'après ①

$\iff n \equiv -2\ (8)$ ou $n \equiv 2\ (8)$

Les solutions de l'équation sont les entiers relatifs de la forme $n = 8k+6$ ou $n = 8k+2$ avec $k \in \mathbb{Z}$, c'est à dire $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{Z}$

ⓑ L'équation équivaut à $(3n^2 + 2n + 1)^2 = 19$

d'où $(3n^2+2n+1)^2 \equiv 3\ (8)$ et ceci est impossible d'après ① $\rightarrow S = \emptyset$.

IV ① $\forall n\in\mathbb{N}$; $2^{3n}-1=(2^3)^n-1\equiv 8^n-1\equiv 1-1\equiv 0\ (7)$

donc $\forall n\in\mathbb{N}$ 7 divise $2^{3n}-1$

• $2^{3n+1}-2=2(2^{3n}-1)$ et $2^{3n}-1$ multiple de 7 $\Rightarrow 2^{3n+1}-2$ multiple de 7

• $2^{3n+2}-4=4(2^{3n}-1)$ donc de même $7\,|\,2^{3n+2}-4$.

② $2\equiv 2\ (7)$
$2^2\equiv 4\ (7)$
$2^3\equiv 1\ (7)$

donc si $n=3k+r$ on a alors $2^n\equiv(2^3)^k\times 2^r\equiv 2^r\ (7)$

d'où si $n=3k$ le reste de la division par 7 de 2^n est $2^0=1$
si $n=3k+1$ ------------------------------- 2
si $n=3k+2$ ------------------------------- $2^2=4$

③ ⓐ si $p=3n$ alors

$A_p=2^{3n}+2^{6n}+2^{9n}$
$\equiv 1+1+1\ (7)$ (d'après ②)
$\equiv 3\ (7)$

donc le reste de la division de A_p par 7 est 3.

ⓑ si $p=3n+1$ alors $A_p=2^{3n+1}+2^{6n+2}+2^{9n+3}$
$=2^{3n+1}+2^{3(2n)+2}+2^{3(3n+1)}$
$\equiv 2+4+1\ (7)$ (d'après ②)
$\equiv 0\ (7)$

d'où 7 divise A_p

ⓒ si $p=3n+2$, $A_p=2^{3n+2}+2^{6n+4}+2^{9n+6}$
$=2^{3n+2}+2^{3(2n+1)+1}+2^{3(3n+2)}$
$\equiv 4+2+1\ (7)$ (d'après ②)
$\equiv 0\ (7)$

d'où 7 divise A_p.

④ $a=2^3+2^6+2^9=A_3$

d'après ⓐ 7 ne divise pas A_3.

$b=2^4+2^8+2^{12}=A_4$

et $4=3+1$ est de la forme $3n+1\Rightarrow 7\,|\,A_4$ d'après ⓑ

Remarque : La question 2b pouvait se déduire directement de la ①