TS

Devoir de spécialité N°3

17 décembre 2008

Ⓘ $\begin{cases} xy = 3375 \\ x \wedge y = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 15x' \;;\; y = 15y' \\ 225x'y' = 3375 \\ x' \wedge y' = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 15x' \;;\; y = 15y' \\ x'y' = 15 \\ x' \wedge y' = 1 \end{cases}$

Les solutions de $\begin{cases} x'y' = 15 \\ x' \wedge y' = 1 \end{cases}$ sont $x' = 1 \;;\; y' = 15$ ou $x' = 3 \;;\; y' = 5$

ou $x' = 5 \;;\; y' = 3$

ou $x' = 15 \;;\; y' = 1$

Donc les solutions du système de départ sont

$S = \{(15, 225) ; (45 ; 75) ; (75, 45) ; (225, 15)\}$.

Ⓘⓘ ① $23 = 17 + 6$ d'où $1 = 6 - 5$

$17 = 6 \times 2 + 5$ $= 6 - (17 - 6 \times 2)$

$6 = 5 + 1$ $= 6 \times 3 - 17$

$= (23 - 17) \times 3 - 17 = 23 \times 3 - 17 \times 4$

Donc $(3 ; 4)$ est une solution particulière de $23x - 17y = 1$

② on déduit alors par produit par 6 $23 \times 18 - 17 \times 24 = 6$ (*)

Donc $(18, 24)$ solution particulière de $23x - 17y = 6$. (E)

③ Par différence entre (E) et (*) on a $23(x - 18) - 17(y - 24) = 0$

d'où $\left.\begin{array}{l} 23(x - 18) = 17(y - 24) \\ 23 \wedge 17 = 1 \text{ (car 23 et 17 premiers)} \end{array}\right\} \overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow} 23 \mid y - 24$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $y - 24 = 23k \Longrightarrow \underline{y = 23k + 24}$.

on a alors $23(x - 18) = 17 \times 23k \Longrightarrow \underline{x = 17k + 18}$

Vérifions que le couple $(x ; y)$ est solution :

$23x - 17y = 23(17k + 18) - 17(23k + 24)$

$= 23 \times 18 - 17 \times 24 = 6$ donc on a

$S = \{(17k + 18 \;;\; 23k + 24),\; k \in \mathbb{Z}\}$

④ $\begin{cases} A \in \mathbb{N} \;;\; A \leq 1000 \\ A = 23q + 2 \quad (L_2) \\ A = 17q' + 8 \quad (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} A \in \mathbb{N} \;;\; A \leq 1000 \\ A = 23q + 2 \\ 23q - 17q' = 6 \quad (L_2) - (L_3) \end{cases}$

$\underset{\text{d'après ③}}{\iff} \begin{cases} A \in \mathbb{N} ,\; A \leq 1000 \\ A = 23q + 2 \\ q = 17k + 18 \;;\; q' = 23k + 24 ,\; k \in \mathbb{N} \end{cases}$

Finalement $A = 23(17k+18)+2 \quad k \in \mathbb{Z}$

et $0 \leq A \leq 1000$

$\Leftrightarrow 0 \leq 391k + 416 \leq 1000$

$\Leftrightarrow -416 \leq 391k \leq 584$

$\Leftrightarrow -391-25 \leq 391k \leq 391+193$

$\Leftrightarrow -1-\frac{25}{391} \leq k \leq 1+\frac{193}{391}$ d'où $k \in \{-1;0;1\}$

Donc les valeurs possibles de A sont 25 ; 416 ; 807

III 1) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n+1-n=1$ donc d'après le thm de Bezout $n \wedge n+1 = 1$

b) $a \wedge b = 1 \Rightarrow$ il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tq $au+bv=1$

donc en élevant au carré $a^2u^2+b^2v^2+2abuv=1$

$\Leftrightarrow a^2u^2+b(bv^2+2auv)=1$

$\Rightarrow a^2 \wedge b = 1$

2) a)

$$\begin{array}{l|l} 2n^3+5n^2+4n+1 & 2n+1 \\ 2n^3+n^2 & n^2+(2n+1) \\ \hline 4n^2+4n+1 & \\ (2n+1)^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

d'où $2n^3+5n^2+4n+1 = (2n+1)(n^2+2n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

d'où $2n+1$ divise a

d'autre part $2n^2+n = n(2n+1) \Rightarrow 2n+1$ divise b.

b) $PGCD(a,b) = PGCD((2n+1)(n^2+2n+1) ; n(2n+1))$

$= (2n+1)\, PGCD(n^2+2n+1 ; n)$

$= (2n+1)\, PGCD((n+1)^2 ; n)$

et d'après 1)a) $PGCD(n,n+1)=1$ et donc d'après 1b) $PGCD((n+1)^2;n)=1$

d'où $PGCD(a,b)=1$. L'élève a donc raison.

IV $x^2-5y^2=3$ (E)

si (x,y) est solut° alors $x^2 \equiv 3 \quad (5)$.

Tableau de congruence modulo 5 :

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1

donc $\forall x \in \mathbb{N}$; $x^2 \not\equiv 3 (5) \Rightarrow$ (E) n'a pas de solution.