Spécialité devoir du Mercredi 21 janvier 2009

I ① ⓐ la congruence est compatible avec le produit est la puissance

donc $6^{10} \equiv (6^2)^5 \equiv 3^5 \equiv 27 \times 9 \equiv 5 \times (-2) \equiv -10 \equiv 1 \ (11)$

donc le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 est 1

ⓑ de même $6^4 \equiv 1^4 \equiv 1 \ (5)$.

ⓒ $6^{10} \equiv 1 \ (11) \Rightarrow (6^{10})^4 \equiv 1^4 \ (11) \Leftrightarrow 6^{40} \equiv 1 \ (11)$

$6^4 \equiv 1 \ (5) \Rightarrow (6^4)^{10} \equiv 1^{10} \ (5) \Leftrightarrow 6^{40} \equiv 1 \ (5)$

ⓓ

d'après ⓒ $6^{40} - 1 \equiv 0 \ (11)$ et $6^{40} - 1 \equiv 0 \ (5)$

d'où $\left.\begin{array}{l} 11 \mid 6^{40} - 1 \\ 5 \mid 6^{40} - 1 \\ 5 \wedge 11 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 55 \mid 6^{40} - 1$

② ⓐ si il existe x, y tq $65x - 40y = 1$ alors d'après le thm de Bezout $65 \wedge 40 = 1$ ce qui est absurde car 5 divise 65 et 40.

ⓑ $17x - 40y = 1$

17 premier et 17 ne divise pas 40 $\Rightarrow 17 \wedge 40 = 1$

donc d'après le thm de Bezout, il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tq $17x - 40y = 1$ donc (E') admet des solutions.

ⓒ $40 = 2 \times 17 + 6$

$17 = 2 \times 6 + 5$

$6 = 5 + 1$

d'où
$$\begin{aligned} 1 &= 6 - 5 \\ &= 6 - (17 - 2 \times 6) \\ &= 3 \times 6 - 17 \\ &= 3 \times (40 - 2 \times 17) - 17 \\ &= 3 \times 40 - 7 \times 17 \end{aligned}$$

Donc le couple $(-7; -3)$ est solution de (E')

(d) Résolution de (E') : $17x - 40y = 1$

et d'autre part $17(-7) - 40(-3) = 1$

donc par différence $17(x+7) - 40(y+3) = 0$

d'où $17(x+7) = 40(y+3)$ (*)

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 17 \mid 40(y+3) \\ 17 \wedge 40 = 1 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Gauss}} 17 \mid y+3$

donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $y+3 = 17k \Rightarrow y = 17k - 3$

d'où (*) $\Rightarrow x = 40k - 7$

Vérifions les solutions : $17x - 40y = 17 \times 40k - 17 \times 7 - 40 \times 17k + 40 \times 3 = 1$

donc $S = \{(40k-7 ; 17k-3), k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{cases} 17x_0 \equiv 1 \ (40) \\ x_0 \in [\![0,40]\!] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17x_0 - 40k' = 1 \quad k' \in \mathbb{Z} \\ x_0 \in [\![0,40]\!] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 40k - 7 \\ k' = 17k - 3 \\ x_0 \in [\![0,40]\!] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 40k - 7 \\ 0 < 40k - 7 < 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 40k - 7 \\ 7 < 40k < 47 \end{cases}$$

d'où $k = 1$ et $x_0 = 33$.

$x_0 = 33$ est l'unique solut° de $17x_0 \equiv 1 \ (40)$ et $x_0 \in \mathbb{N}$; $x_0 < 40$

(3) $$\begin{cases} a^{17} \equiv b \ (55) \\ a^{40} \equiv 1 \ (55) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a^{17})^{33} = b^{33} \ (55) \\ a^{40} \equiv 1 \ (55) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{14 \times 40 + 1} = b^{33} \ (55) \\ a^{40} \equiv 1 \ (55) \end{cases}$$

d'où $(a^{40})^{14} \times a \equiv b^{33}$ (55) et donc $b^{33} \equiv a \ (55)$

(II) (5) $$\begin{cases} a - b = 300 \\ a < 600 \\ a \wedge b = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = da' ; b = db', a' \wedge b' = 1, d = 30 \\ 30a' < 600 \\ 30(a' - b') = 300 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 30a' ; b = 30b' \\ a' < 20 \\ a' \wedge b' = 1 \\ a' - b' = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 30a' ; b = 30b' ; a' < 20 \\ a' \wedge b' = 1 \\ a' = b' + 10 . \end{cases}$$

$a' \wedge b' = (b'+10) \wedge b'$ (car $b'+10 = a'$) donc $S \Leftrightarrow \begin{cases} a = 30a', b = 30b', a' < 20 \\ a' = b' + 10 \\ b' \wedge 10 = 1 \quad (\text{et } b' \in \{1, \dots, 10\}) \end{cases}$

$= b' \wedge 10$ d'après le cours.

Les valeurs possibles de b' sont 1, 3, 7, 9 d'où $S_{(a',b')} = \{(11,1), (13,3), (17,7), (19,9)\}$

et $S = \{(330,30) ; (390,90) ; (510,210) ; (570,270)\}$