Devoir surveillé de mathématiques

Terminales S – Spécialité

Mercredi 21 janvier 2009

Durée : 1 heure

L'usage d'une calculatrice est autorisé.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

1. a. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.
   b. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.
   c. En déduire que $6^{40} \equiv 1 \ [11]$ et que $6^{40} \equiv 1 \ [5]$.
   d. Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.
2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.
   a. Montrer que l'équation
   $$(E) \ : \ 65x - 40y = 1$$
   n'a pas de solution.
   b. Montrer que l'équation
   $$(E') \ : \ 17x - 40y = 1$$
   admet au moins une solution.
   c. Déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').
   d. Résoudre l'équation (E').
   En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que :
   $$17x_0 \equiv 1 \quad [40]$$
3. Pour tout entier naturel a, démontrer que :
   $$\text{Si} \quad \begin{cases} a^{17} \equiv b \quad [55] \\ a^{40} \equiv 1 \quad [55] \end{cases} \qquad \text{alors} \quad b^{33} \equiv a \quad [55]$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système ci-dessous :

$$(S) \ : \ \begin{cases} a - b = 300 \\ a < 600 \\ \text{pgcd}(a;b) = 30 \end{cases}$$