

## Devoir de spécialité n° 5

I

$$\textcircled{1} \textcircled{a} \left. \begin{array}{l} \Delta(O) = A \\ \Delta(B) = O \end{array} \right\} \Rightarrow \text{l'angle de } \Delta \text{ vaut } (\vec{OB}, \vec{AO}) = (\vec{OB}, \vec{OA}) + (\vec{OA}, \vec{AO}) \\ = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

$$\textcircled{b} \left. \begin{array}{l} \Delta(O) = A \\ \Delta(\Omega) = \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow (\vec{\Omega O}, \vec{\Omega A}) = +\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

donc  $\Omega O A$  rectangle en  $\Omega \Rightarrow \Omega$  point du cercle de diamètre  $[OA]$ .

$$\text{on a de même } \left. \begin{array}{l} \Delta(B) = O \\ \Delta(\Omega) = \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow (\vec{\Omega B}, \vec{\Omega O}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{donc } (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) = (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega O}) + (\vec{\Omega O}, \vec{\Omega B}) \quad (2\pi) \\ = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi \quad (2\pi) \quad \text{donc } \Omega \in [AB]$$

d'autre part  $(\vec{\Omega O}, \vec{\Omega A}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \Rightarrow (\Omega O) \perp (AB)$  donc  $\Omega$  pied de la hauteur issue de  $O$  du triangle  $OAB$

$$\textcircled{2} \textcircled{a} \left. \begin{array}{l} B \mapsto O \\ \Delta \text{ d'angle } \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{l'image de } (BB') \text{ est une droite perpendiculaire } \\ \tilde{\alpha} (BB') \text{ passant par } \Delta(B) = O.$$

d'autre part  $B'$  projection orthogonale de  $B$  sur  $\mathcal{D} \Rightarrow (BB') \perp \mathcal{D}$  (et  $O \in \mathcal{D}$ )

d'où l'image de  $(BB')$  est la droite  $\mathcal{D}$ .

$$\bullet \left. \begin{array}{l} O \mapsto A \\ O \in \mathcal{D} \\ \Delta \text{ d'angle } \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{l'image de } \mathcal{D} \text{ est une droite passant par } \Delta(O) = A \\ \text{et perpendiculaire à } \mathcal{D}.$$

d'autre part  $A'$  projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{D} \Rightarrow (AA') \perp \mathcal{D}$ .

d'où l'image de  $\mathcal{D}$  est  $(AA')$ .

$$\textcircled{b} \left. \begin{array}{l} B' \text{ est le point d'intersection de } \mathcal{D} \text{ et } (BB') \\ \Delta \text{ conserve l'intersection.} \\ \mathcal{D} \mapsto (AA') \\ (BB') \mapsto \mathcal{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta(B') \text{ point d'intersection de } (AA') \\ \text{et } \mathcal{D} \\ \text{donc } \Delta(B') = A'$$

$$\textcircled{c} \text{ On a donc } \left. \begin{array}{l} \Omega \mapsto \Omega \\ B' \mapsto A' \\ \Delta \text{ d'angle } \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow (\vec{\Omega B'}, \vec{\Omega A'}) = +\frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \Rightarrow \Omega A' B' \text{ rectangle en } \Omega \\ \Rightarrow \Omega \text{ point du cercle de diamètre } [A'B']$$

II)  $A_0(5-4i), A_1(-1-4i); A_2(-4-i)$

① a)  $\left. \begin{matrix} A_0 \neq A_1 \\ A_1 \neq A_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$  par thm, il existe une unique similitude  $s$  telle que  $s(A_0) = A_1$  et  $s(A_1) = A_2$

b)  $s$  similitude directe, donc  $s$  a une écriture complexe de la forme

$$z' = az + b \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{C}.$$

ici on a donc 
$$\begin{cases} -1-4i = a(5-4i) + b \\ -4-i = a(-1-4i) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-4i = a(5-4i) + b \\ 3-3i = a(6+0i) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3(1-i)}{6} = \frac{1-i}{2} \\ b = -1+4i - \frac{1-i}{2}(5-4i) \end{cases}$$

finalement,  $b = -1-4i - \frac{1}{2}(1-9i)$   
 $= -\frac{3}{2} + \frac{i}{2}$

d'où  $s$  a pour écriture

$$z' = \frac{1-i}{2}z - \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$$

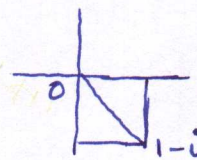
② Le rapport de  $s$  est  $|\frac{1-i}{2}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

l'angle de  $s$  est  $\Theta = \arg(\frac{1-i}{2}) = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$

Soit  $\Omega(w)$  le centre de  $s$ ,  $\Omega$  fixe donc

$$\frac{1-i}{2}w - \frac{3}{2} + \frac{i}{2} = w \Leftrightarrow w(\frac{1+i}{2}) = \frac{-3+i}{2}$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{-3+i}{1+i} = \frac{(-3+i)(1-i)}{2} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$$



③  $H(y); H'(y')$  avec  $H \mapsto H'$

donc  $w - z' = -1+2i - \frac{1-i}{2}z + \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{1-i}{2}z = i \left( \frac{3}{2} - \frac{i}{2} + \frac{1+i}{2}z \right)$$

et  $z - z' = \frac{1+i}{2}z + \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$  d'où on a bien  $w - z' = i(z - z')$

On déduit que dans la rotat<sup>9</sup> de centre  $H'$  et d'angle  $+\frac{\pi}{2}$ , on a  $\sigma(H) = \Omega$

en particulier on a alors  $H'H\Omega$  rectangle isocèle en  $H'$ .

② a) voir figure.

b)  $\left. \begin{matrix} A_{n-1} \mapsto A_n \\ A_n \mapsto A_{n+1} \\ s \text{ de rapport } \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix} \right\}$

$$\Rightarrow A_n A_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} A_{n-1} A_n \Leftrightarrow \mu_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \mu_{n-1}$$

d'où  $(\mu_n)$  géométrique de raison  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\textcircled{3} \textcircled{a} U_m = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

$$(u_n) \text{ géométrique de raison } \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}; u_m = u_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^m$$

$$\text{et } u_0 = A_0 A_1 = |-1-4i - 5+4i| = 6. \Rightarrow u_m = 6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^m \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } U_m &= u_0 + u_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \dots + u_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^m \\ &= u_0 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \dots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^m\right) = u_0 \cdot \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \end{aligned}$$

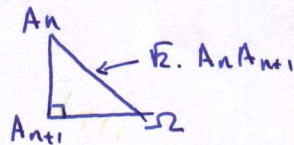
$$\textcircled{b} \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_m = \frac{u_0}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6 \times 2}{2 - \sqrt{2}} = \frac{12}{2 - \sqrt{2}} = \frac{12(2 + \sqrt{2})}{2}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_m = 6(2 + \sqrt{2})$$

$\textcircled{4} \textcircled{a}$   $\Omega A_n A_{n+1}$  est rectangle en  $A_{n+1}$  d'après (1d)

d'où le centre du cercle circonscrit est le milieu de  $[\Omega A_n]$  et le rayon

$$\text{vaut } r_n = \frac{\Omega A_n}{2} = \frac{\sqrt{2} A_n A_{n+1}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} u_m$$



$$\textcircled{b} r_n < 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} u_m < 10^{-2} \Leftrightarrow 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{m+1} < 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow (n+1) \ln \frac{\sqrt{2}}{2} < \ln \left(\frac{10^{-2}}{6}\right) \text{ car } \ln \uparrow \text{ sur } \dots$$

$$\Leftrightarrow n+1 > \frac{\ln \left(\frac{10^{-2}}{6}\right)}{\ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \text{ car } \ln \frac{\sqrt{2}}{2} < 0.$$

$$\text{d'où finalement } n > \frac{\ln \left(\frac{10^{-2}}{6}\right)}{\ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} - 1 \approx 17,46.$$

le plus petit entier naturel  $p$  cherché est donc  $p = 17$