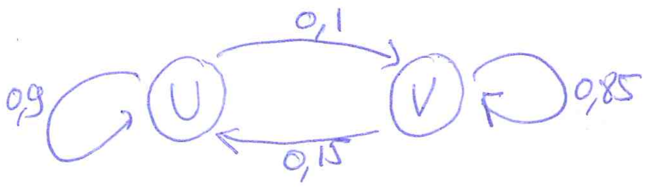
DS 5 spé TES.

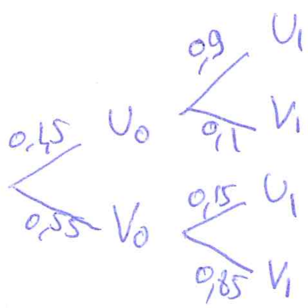
(I) (1) D'après les données de l'énoncé, on a



(2) $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n + v_n = 1$

donc $v_0 = 1 - u_0 = 0,55$

on a l'arbre suivant



ainsi $u_1 = P(U_1) = 0,45 \times 0,9 + 0,55 \times 0,15$

$\simeq 0,487$ et donc $v_1 \simeq 0,513$ (car $v_1 = 1 - u_1$)

ainsi au bout de 1 an il y a 48,7% de parts de marché pour U et 51,3 pour V.

(3) Pour L_5 : Affecter à V la valeur 1-U.
Pour L_8 : Affecter à V la valeur 1-V

(4) On a $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$

(5) On nous demande les parts de marché l'année 2013 + 3.
ainsi nous devons calculer P_3 :

$P_3 = P_0 \times M^3$ (d'après le cours)

donc $P_3 = (0,45 \quad 0,55) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}^3 = (0,5367 \quad 0,4632)$ ~~(0,5367 0,4633)~~

Ainsi la part de marché de U en 2016 est de 53,7% et celle de V est de 46,3%

⑥ La matrice M de transition ne contient pas de 0 donc d'après le cours il existe un état stable $P = (a\ b)$ qui satisfait $P = P.M$

on a donc $(a\ \ b) = (a\ \ b)\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$

donc on a $\begin{cases} 0,9a + 0,15b = a & L_1 \\ 0,1a + 0,85b = b & L_2 \end{cases}$

de plus $a+b=1$ donc $b = 1-a$

d'où avec L_1 on a $0,9a + 0,15(1-a) = a$

donc $a - 0,9a + 0,15a = 0,15$

$\Rightarrow 0,25a = 0,15$

$\Rightarrow a = \frac{0,15}{0,25} = \frac{3}{5}$

on a alors $b = 1-a = \frac{2}{5}$

L'état stable est $P = \left(\frac{3}{5}\ \ \frac{2}{5}\right)$

Au bout d'un grand nombre d'années les parts de marché sont de $3/5$ pour l'entreprise U et $\frac{2}{5}$ pour la V. C'est-à-dire (60% ; 40%).

Partie B.

① ⓐ On a (S) : $\begin{cases} a+b+c = 1 \\ 27a+9b+3c = 17,4 \\ 125a+25b+5c = 73 \end{cases}$

En posant $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 \\ 125 & 25 & 5 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 17,4 \\ 73 \end{pmatrix}$

alors on a $S \Leftrightarrow MX = Y$

ⓑ M a pour matrice $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & -1/12 & 1/40 \\ -1 & 1/2 & -1/10 \\ 15/8 & -5/12 & 3/40 \end{pmatrix}$

et donc $MX = Y \Leftrightarrow M^{-1}MX = M^{-1}Y$

$\Leftrightarrow IX = M^{-1}Y$ avec I matrice identité

$\Leftrightarrow X = M^{-1}Y$

d'où $X = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/5 \\ 1/10 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $a = 0,5$

$b = 0,4$

$c = 0,1$

② le coût vaut alors $C(x) = 0,5x^3 + 0,4x^2 + 0,1x + 10$

et donc $C(8) = 292,4$ alors le coût pour 8000 unités est de 29.240 €

Ⓘ ① Tableau des degrés du graphe :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
degré	3	4	4	3	4	4	2

le graphe est connexe car il existe une chaîne entre chaque couple de sommets.
il y a exactement 2 sommets de degré impair donc d'après le th d'Euler il y a une chaîne Eulerienne entre les sommets A et D mais il n'y a pas de cycle Eulerien

finalement Philippe peut visiter la ville en parcourant une et une seule fois chaque piste (entre A et D) et il ne peut pas rendre le vélo à la même stat°.

② ⓐ M est symétrique donc M^3 doit être symétrique or $T_{14} \neq T_{41}$ donc T n'est pas symétrique

d'où $M^3 = N$

ⓑ M^3 donne le nombre de chemin de longueur 3 entre 2 stat°. Philippe est passé devant 2 stations entre F et E donc il a fait un chemin de longueur 3 entre F et E.
par lecture sur $M^3 = N$ on déduit qu'il y a 11 chemins possibles.

③ A l'aide de l'algorithme de Dijkstra on a :

A	B	C	D	E	F	G
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	7_A	11_C	∞	∞	13_A	∞
		11_C	22_B	21_B	13_A	∞
			22_B	20_C	13_A	∞
			22_B	20_C		31_F
			22_B			31_F
						27_D

le temps de parcours de A à G est donc de 27 min.
il s'agit de A – B – D – G.