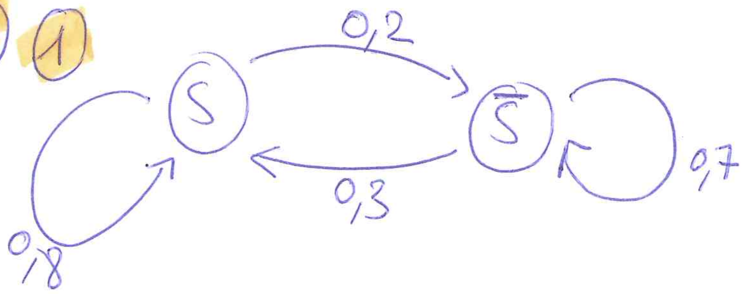
DS4 - Spé TES - 7 mars 2014

I **1**



2 **a** $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$ est la matrice de transit°.

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,8^2+0,2\cdot 0,3 & 0,8\cdot 0,2+0,2\cdot 0,7 \\ 0,3\cdot 0,8+0,7\cdot 0,3 & 0,3\cdot 0,2+0,7^2 \end{pmatrix}$$

b $M^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$

c on a $P_0 = (1 \quad 0)$ et $P_1 = P_0 . M$

$$P_2 = P_1 M = P_0 M . M = P_0 M^2 = (0,7 \quad 0,3)$$

3 $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n M$ par théorème du cours.

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$(p_n \quad q_n) \; (0,8p_n + 0,3q_n \quad 0,2p_n + 0,7q_n)$$

donc $(p_{n+1} \quad q_{n+1}) = P_{n+1} = (0,8p_n + 0,3q_n \quad 0,2p_n + 0,7q_n)$

En particulier $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,3q_n$ mais $p_n + q_n = 1$

$$\Rightarrow q_n = 1 - p_n$$

Donc finalement $p_{n+1} = 0,8 p_n + 0,3(1-p_n)$

$$\boxed{p_{n+1} = 0,5 p_n + 0,3}$$

4) La ligne 6 doit être la suivante :

6 : p prend la valeur $0,5p+0,3$.

B

1) pour $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,6$

$= 0,5 p_n + 0,3 - 0,6$

$= 0,5 p_n - 0,3$

$= 0,5\left(p_n - \frac{0,3}{0,5}\right) = 0,5(p_n - 0,6) = 0,5 u_n$

finalement (u_n) géométrique de 1er terme $u_0 = p_0 - 0,6 = 0,4$ et de raison $0,5$

2) Par th on déduit pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$

$\Rightarrow u_n = 0,4 \times 0,5^n$

on a alors $p_n = 0,6 + u_n$ donc $p_n = 0,4 \times 0,5^n + 0,6$.

3) $0 \leq 0,5 < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (0,5)^n = 0$

on a alors $\lim_{n \to +\infty} p_n = 0,6$

Au bout de quelques années la répartition des skieurs est de 60% de skieurs et 40% de snowboards.

ⓒ Nous avons un graphe pondéré connexe et on cherche la chaîne de poids minimal entre A et I

On utilise l'algorithme de Dijkstra.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	7_A	16_A	∞	21_A	∞	∞	∞	∞
		16_A	25_B	21_A	15_B	∞	∞	∞
		16_A	25_B	20_F		∞	22_F	∞
			25_B	20_F		∞	22_F	∞
			25_B			∞	22_F	38_F
			25_B			35_H		38_E
						30_D		38_E
								37_G

Finalement le chemin le plus court est A-B-D-G-I et il mesure 3700 = 3,7 km