DS 18 - Espace

I ① ⓐ On a $V = \frac{\pi}{3} \times h^2 \times (3r-h)$

$= \frac{\pi}{3} \cdot 18^2 \cdot (30-18)$

$= \frac{\pi}{3} \cdot 18^2 \cdot 12 = \pi \cdot 18^2 \cdot 4 = 1296\pi \text{ cm}^3$

ⓑ $1\ell = 1\text{ dm}^3$

$= (10\text{ cm})^3 = 10^3\text{ cm}^3$

donc $V = 1296\pi \text{ cm}^3$

$= 1{,}296\pi \cdot 10^3 \text{ cm}^3$

$= 1{,}296\pi\ \ell$

$\approx 4{,}071\ \ell \approx 4$ litres (arrondi au litre)

② le volume du nouvel aquarium est

$V = 15 \times 20 \times h$ où h est sa hauteur

$= 300h$

ainsi on cherche h tel que $300h = 1296\pi$

Alors $h = \frac{1296\pi}{300} = \frac{108}{25}\pi \approx 14\text{ cm}$ (13,57)

II ① D'après la carte, Pyeongchang est situé à 127° E de longitude et 35° N de latitude.

② le volume de la boule est $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$ avec $R = \frac{23}{2} = 11{,}5$

donc $V_B = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{23}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{23^3}{8} \cdot \pi = \frac{1}{6} \cdot 23^3\pi \approx 6371\text{ cm}^3.$

③ On calcule le volume du pied qui est un cylindre de hauteur $h = 23$ cm et rayon $r = \frac{6}{2} = 3$ cm.

Le volume du pied est $V_p = \pi R^2 \times h$

$$= \pi \cdot 3^2 \times 23 = \boxed{207\pi \text{ cm}^3} \approx 650 \text{ cm}^3$$

Le volume total du trophé est donc

$$V_T = \frac{23^3\pi}{6} + 207\pi = \boxed{\frac{13409\pi}{6} \text{ cm}^3}$$

Le rapport entre le volume de la boule et celui du trophé est

$$r = \frac{V_B}{V_T} = \frac{\frac{23^3\pi}{6}}{\frac{13409\pi}{6}}$$

$$= \frac{23^3}{13409} \approx 0,907 \approx \boxed{90,7\%}$$

Donc oui, le volume de la boule représente bien 90% du trophé.

III 1a Le volume de la pyramide est $V = 108$ cm^3

mais aussi nous savons que $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ABCD) \times h$

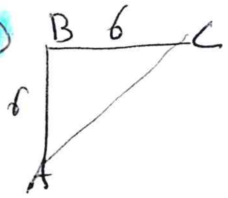
et ici $h = 9$.

donc $108 = \frac{1}{3} \mathcal{A}(ABCD) \times 9$

donc $\mathcal{A}(ABCD) = \frac{108}{3} = 36$ cm^2

1b ABCD est un carré donc $\mathcal{A}(ABCD) = AB^2$

donc $AB^2 = 36$ donc $AB = 6$ cm.

1c 

ABC est un triangle rectangle donc le côté AC est donné par le th de Pythagore

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= 6^2 + 6^2 = 72 \quad \text{donc } AC = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2}$$
$$= \sqrt{36} \cdot \sqrt{2}$$
$$= 6\sqrt{2}$$

On peut aussi à la calculatrice

Le périmètre de ABC est alors

$$\mathcal{P}(ABC) = 6 + 6 + 6\sqrt{2} = \boxed{12 + 6\sqrt{2} \text{ cm}}.$$

2a) On a deux pyramides. La petite est une réduction de la grande de rapport k.

On a donc $\mathcal{A}(HNOP) = k^2 \mathcal{A}(ABCD)$

ce qui nous donne $4 = k^2 \times 36$

donc $k^2 = \frac{4}{36}$ donc $k^2 = \frac{1}{9}$ donc $k = \frac{1}{3}$

Alors $\mathcal{V}(SHNOP) = k^3 \mathcal{V}(SABCD)$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 108 = \boxed{4 \text{ cm}^3}.$$

2b) Il s'agit d'une réduction de rapport $k = \frac{1}{3}$ donc les longueurs sont multipliées par $\frac{1}{3}$.

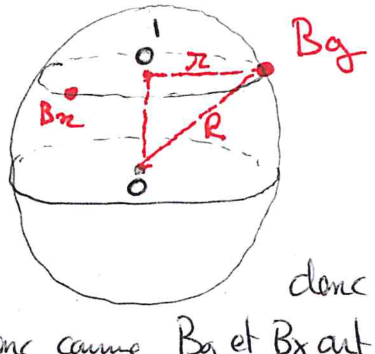
donc $\mathcal{P}(MNO) = \frac{1}{3}\mathcal{P}(ABC)$

$$= \frac{\mathcal{P}(ABC)}{3}$$

En effet, Elise a raison, il suffit de diviser par 3 le périmètre de ABC.

IV) Belgrade et Bordeaux sont sur le même parallèle.

On a la figure suivante :



$OO'Bg$ est rectangle et $\widehat{O'OBg} = 90 - 44,5 = 45,5°$

Alors par trigonométrie nous avons le rayon du parallèle de Belgrade qui vaut r

et $\sin \widehat{O'OBg} = \frac{r}{R}$ où $R = 6371$

donc $r = R \times \sin \widehat{O'OBg} \approx 4544$.

et donc comme Bg et Bx ont une différence angulaire de 20° on a : distance $= 2\pi r \times \frac{20}{360} \approx 1586$ km