Epreuve de Spécialité 16/12/2009

I A 1 $11x - 26y = 1$ (E)

Recherchons une solution particulière de (E) à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$26 = 11 \times 2 + 4$ d'où $1 = 4 - 3$

$11 = 4 \times 2 + 3$ $\iff 1 = 4 - (11 - 4 \times 2)$

$4 = 3 + 1$ $\iff 1 = 4 \times 3 - 11$

$\iff 1 = (26 - 11 \times 2) \times 3 - 11$

$\iff 1 = 26 \times 3 - 7 \times 11$

Donc $-7 \times 11 + 3 \times 26 = 1 \implies (-7 ; -3)$ solution particulière de (E)

d'autre part (E) $\iff 11x - 26y = 1$

Donc par différence, $11(x+7) - 26(y+3) = 0$

$\iff 11(x+7) = 26(y+3)$ (*)

11 et $26 = 13 \times 2$ sont premiers entre eux

(*) montre que $\left. \begin{array}{l} 11 \mid 26(y+3) \\ 11 \wedge 26 = 1 \end{array} \right\} \implies$ d'après le théorème de Gauss $11 \mid y + 3$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $y = 11k - 3$

En reportant cette valeur de y dans (*) on a $11(x+7) = 26 \times 11k$

$\implies x = 26k - 7$

Vérifions que $x = 26k - 7$; $y = 11k - 3$; $k \in \mathbb{Z}$ est bien solution de (E)

$11x - 26y = 11 \times 26k - 11 \times 7 - 26 \times 11k + 26 \times 3$

$= -11 \times 7 + 26 \times 3 = 1$

d'où $\boxed{S = \{(26k - 7 ; 11k - 3) ; k \in \mathbb{Z}\}}$

2 on veut $0 \leqslant 26k - 7 \leqslant 25$

$\iff 7 \leqslant 26k \leqslant 32 \iff \frac{7}{26} \leqslant k \leqslant \frac{32}{26}$.

et $\frac{7}{26} = 0,\ldots$; $\frac{32}{26} = 1,\ldots$ d'où la seule valeur entière de k est $k = 1$

le couple (u, v) cherché est $(19, 8)$

Donc $11 \times 19 - 26 \times 8 = 1$

(B) ① W est assimilée à 22

et $11\times 22+8 \equiv 11(-4)+8 \ (26)$

$\equiv -36 \ (26)$

$\equiv 16 \ (26)$

et 16 est associé à Q donc W est codé par Q

② ⓐ $11x \equiv j \ (26) \Rightarrow 11\times 19\, x \equiv 19 j \ (26)$ (Compatibilité de la congruence avec le produit

$\Rightarrow x \equiv 19 j (26)$ car d'après Ⓐ $11\times 19 = 1+26\times 8 \equiv 1 \ (26)$

Réciproquement: $x \equiv 19 j \ (26) \Rightarrow 11x \equiv 11\times 19\, j \ (26)$ (Compatibilité avec le pr

$\Rightarrow 11x \equiv j (26)$.

Finalement on a bien $11x \equiv j (26) \iff x \equiv 19$

ⓑ Supposons qu'une lettre codée soit associée à y. Il faut résoudre $11x+8 \equiv y (26) \iff 11x \equiv y-8$ (

$\iff x \equiv 19(y-8)$

d'où la valeur de x e lettre associée

ⓑ Soit une lettre codée par W (associée à 22)

c'est que $11x+8 \equiv 22 \ (26)$

$\iff 11x \equiv 14 \ (26)$

$\iff x \equiv 19\times 14 \ (26)$

$\equiv (-7)\times(-12) \equiv 84 \equiv 3\times 26+6 \ (26)$

$\equiv 6 \ (26)$ et 6 associé à G.

d'où W se décode par G.

(II) ① faisons la division de a par b :

$$\begin{array}{r|l} n^3 - 2n + 5 & n+1 \\ n^3 + n^2 & \overline{n^2 - n - 1} \\ \hline -n^2 - 2n + 5 & \\ -n^2 - n & \\ \hline -n + 5 & \\ -n - 1 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

d'où $a = b(n^2-n-1)+6$

donc d'après le th fondamental du PGCD

on a $PGCD(a,b) = PGCD(b,6)$

③ $\frac{a}{b} = n^2 - n - 1 + \frac{6}{b}$

donc $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \iff \frac{6}{b} \in \mathbb{Z} \iff$ b diviseur de 6 d'où $b \in \{-6;-3;-2;-1;1;2;$

donc $n \in \{-7;-4;-3;-2;0;$

② $PGCD(a;b) = 3 \iff PGCD(b;6) = 3$

$\iff$ b multiple de 3 sans être multiple de 2

$\iff b = 3k$ avec k non multiple de 2 (c'est-à-dire impair)

$\iff b = 3(2k'+1)$

$\iff b = 6k'+3 \iff b \equiv 3 \ (6) \iff n \equiv 2 \ (6)$

Conclusion : $PGCD(a,b) = 3 \iff b \equiv 3 \ (6)$