

# Devoir surveillé de mathématiques

## Terminales S – Spécialité

Mercredi 16 décembre 2009

Durée : 1 heure (Durée totale : 3 heures 30)

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

### Exercice 1

---

#### Partie A

On considère l'équation (E) :  $11x - 26y = 1$ , où  $x$  et  $y$  désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Résoudre l'équation (E).
2. En déduire le couple d'entiers relatifs  $(u; v)$  solution de (E) tel que  $0 \leq u \leq 25$ .

#### Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier  $x$  compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

- on calcule  $11x + 8$
  - on calcule le reste de la division euclidienne de  $11x + 8$  par 26, que l'on appelle  $y$ .
- $x$  est alors « codé » par  $y$ .

Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ;  $11 \times 11 + 8 = 129$  or  $129 \equiv 25 \pmod{26}$  ; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z.

La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. Coder la lettre W.
2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.
  - a. Montrer que pour tous nombres entiers relatifs  $x$  et  $j$ , on a :
$$11x \equiv j \pmod{26} \text{ équivaut à } x \equiv 19j \pmod{26}.$$
  - b. En déduire un procédé de décodage.
  - c. Décoder la lettre W.

### Exercice 2

---

$n$  étant un entier relatif quelconque, on considère  $a$  et  $b$  définis par  $a = n^3 - 2n + 5$  et  $b = n + 1$ .

1. Montrer que  $PGCD(a; b) = PGCD(b; 6)$ .
2. Pour quelles valeurs de  $n$  a-t-on  $PGCD(a; b) = 3$  ?
3. Déterminer  $n$  pour que le nombre  $\frac{a}{b}$  soit un entier relatif.