DS 2 - Spé maths

I $30 \equiv 2 \ (7)$

d'où $3x \equiv 30 \ (7) \iff 3x \equiv 2 \ (7)$.

faisons un tableau de congruences modulo 7 :

x	0	1	2	3	4	5	6
$3x$	0	3	6	2	5	1	4

Il est donc clair que $3x \equiv 2 \ (7) \iff x \equiv 3 \ (7)$.

L'ensemble des solutions est donc $S = \{ x = 3 + 7k ;\ k \in \mathbb{Z} \}$.

II $2010 \equiv -3 \ (11)$ par th car un nombre est congru à la somme alternée de ses chiffres modulo 11
$\equiv 8 \ (11)$

donc $2010^{2010} \equiv 8^{2010} \ (11)$.

$8 \equiv 8 \ (11)$
$8^2 \equiv 9 \ (11)$
$8^3 \equiv 6 \ (11)$
$8^4 \equiv 4 \ (11)$
$8^5 \equiv 10 \equiv -1 \ (11)$
donc $8^{10} \equiv 1 \ (11)$

donc
$8^{2010} \equiv 8^{201 \times 10} \equiv (8^{10})^{201} \equiv 1^{201} \equiv 1$ (

donc le reste de la division de 2010^{2010} par 11 est 1

III ① $7^0 \equiv 7^0 \equiv 1 \ (4)$
$7 \equiv 7 \equiv 3 \ (4)$
$7^2 \equiv 1 \ (4)$.

- si n pair alors $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ donc $7^n \equiv (7^2)^k \equiv 1 \ (4)$
et donc le reste de la division de 7^n par 4 est 1

- si n impair, alors $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ donc $7^n \equiv (7^2)^n \times 7 \equiv 7 \equiv 3 (4)$
et donc le reste de la division de 7^n par 4 est 3

② $7^{n+1} - (n+1)7^n - 1 \equiv 0 \ (4)$ (E).

- si n pair ; $7^n \equiv 1 \ (4)$ et $7^{n+1} \equiv 3 \ (4)$ d'où
(E) $\iff 3 - (n+1) - 1 \equiv 0 \ (4)$
$\iff 1 - n \equiv 0 \ (4) \iff n \equiv 1 \ (4)$ impossible car n pa

si n impair, alors $7^n \equiv 3\ (4)$ et $7^{n+1} \equiv 1\ (4)$

d'où $(E) \iff 1-(n+1)3-1 \equiv 0\ (4)$

$\iff 3(n+1) \equiv 0 \quad (4).$

$\iff 3n \equiv -3 \quad (4)$

$\iff 3n \equiv 1 \quad (4).$

faisons un tableau de congruences modulo 4 pour résoudre cette equ

$n \equiv (4)$	0	1	2	3
$3n \equiv (4)$	0	3	2	1

d'où $3n \equiv 1\ (4) \iff n \equiv 3\ (4)$. (et c'est bien un nombre im

donc $S = \{3+4k \,;\, k \in \mathbb{N}\}$.

IV $N = \overline{aaaa}^{10}$

$= a + 10a + 100a + 1000a$

$= a\,(1111).$

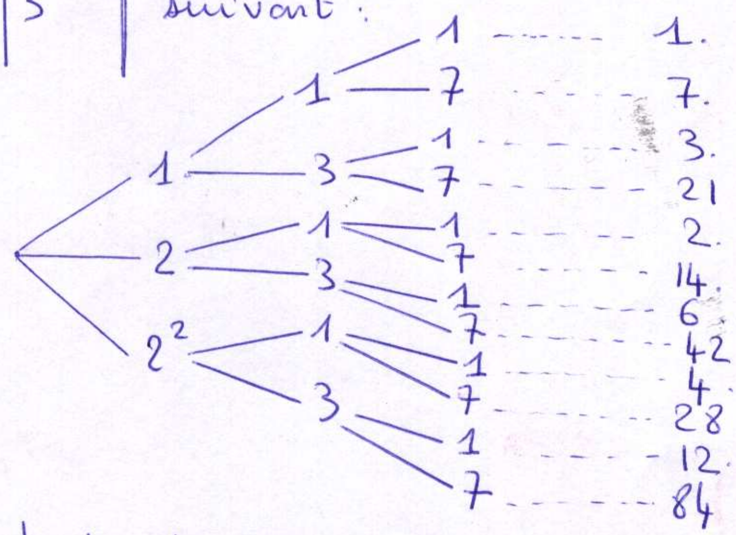
$= 101 \times 11 \times a$ donc 101 divise N.

V 1 décomposons 84 en produit de facteurs premiers.

84	2
42	2
21	7
3	3
1	

donc $84 = 2^2 \times 3 \times 7$.

Les diviseurs s'obtiennent donc à l'aide de l'arbre suivant :



La liste des diviseurs de 84 est donc dans l'ordre croissant

1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84

② on veut résoudre $x(x+1)(2x+1) = 84$ avec $x \in \mathbb{N}$.

donc $x, x+1, 2x+1$ doivent être des diviseurs de 84, et deux d'entre eux sont consécutifs.

Essayons les cas possibles avec la liste de ①.

$x = 1$ impossible.
$x = 2$ donne $x(x+1)(2x+1) = 2 \times 3 \times 7 \neq 84$ ne marche pas
$x = 3$ donne $3 \times 4 \times 7 = 84$

Les autres cas sont impossibles car il donnent un produit supérieur à 8[4]
d'où la seule solution est $x = 3$.

VI ① $n = 2^\alpha 3^\beta$ (décomposition en facteurs premiers)

donc par th (à l'aide de l'arbre), le nombre de diviseurs de n est $(\alpha+1)(\beta+1)$

② $n^2 = 2^{2\alpha} 3^{2\beta}$ (décomposit° en facteurs premiers)

donc par th, le nombre de diviseurs de n^2 est

$(2\alpha+1)(2\beta+1)$.

③ Les hypothèses de l'énoncé se traduisent par

$$3(\alpha+1)(\beta+1) = (2\alpha+1)(2\beta+1) \qquad (*)$$

$$\iff 3(\alpha\beta + \alpha + \beta + 1) = 4\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 1$$

$$\iff \alpha\beta - \alpha - \beta - 2 = 0$$

or $(\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\beta - \alpha - \beta + 1$
$= \alpha\beta - \alpha - \beta - 2 + 3$

donc $(*) \iff (\alpha-1)(\beta-1) - 3 = 0 \iff (\alpha-1)(\beta-1) = 3$

④ $\alpha-1$ et $\beta-1$ sont des diviseurs de 3 positifs

d'où $\alpha-1 = 1$ et $\beta - 1 = 3 \iff \alpha = 2$ et $\beta = 4$

ou

$\alpha - 1 = 3$ et $\beta - 1 = 1 \iff \alpha = 4$ et $\beta = 2$

Les valeurs possibles de n sont $n = 2^2 \times 3^4 = 324$ ou $n = 144$