DS 5 - Spécialité

I ① $A(10)$; $B(5i)$

ⓐ s similitude directe telle que $O \longmapsto A$, $B \longmapsto O$

s a pour écriture complexe $z' = az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$

$$\left.\begin{array}{l} O \mapsto A \\ B \mapsto O \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 10 = b \\ 0 = a \times 5i + b \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 10 \\ a = -\dfrac{10}{5i} = 2i \end{array}\right.$$

donc s a pour écriture $z' = 2iz + 10.$

ⓑ on a $a = 2i$ donc le rapport de s est $k = |2i| = 2$ et l'angle est $\theta = \frac{\pi}{2}$

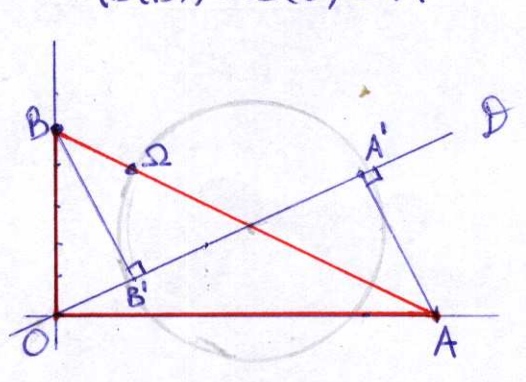
de plus $\Omega(\omega)$ centre s est le point invariant

d'où $\omega = 2i\omega + 10 \Longleftrightarrow \omega(1-2i) = -10$

$\Longleftrightarrow \omega = \dfrac{10}{1-2i} = \dfrac{10(1+2i)}{5} = 2(1+2i).$

donc $\Omega(2+4i)$

ⓒ $s(s(B)) = s(O) = A$



$s \circ s$ est une similitude directe de rapport 2^2 et d'angle π de centre Ω.

$\Rightarrow s\circ s$ homothétie de rapport -4 et de centre

et $s \circ s(B) = A$ d'où $\overrightarrow{\Omega A} = -4\overrightarrow{\Omega B}$

donc $5\overrightarrow{\Omega A} = -4\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$ d'où la construct° de $\Omega \in [$

de plus $\begin{array}{l} O \xrightarrow{s} A \\ \Omega \xrightarrow{s} \Omega \end{array}$ donc $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega A}) = +\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

et $\Omega \in [AB]$ donc Ω est le pied de la hauteur du triangle OAB issue de O.

② $\mathcal{D}: x - 2y = 0$; $A'(8;4)$ $B'(2;1)$

les coordonnées de A' et B' satisfont l'éq de $\mathcal{D} \Rightarrow A', B' \in \mathcal{D}.$

$\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}: y = \frac{x}{2}$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = -2+2=0$; $\overrightarrow{BB'} \cdot \vec{u} = 0$

d'où $(AA') \perp \mathcal{D}$ et $(BB') \perp \mathcal{D}$

et comme de plus $A', B' \in \mathcal{D}$ on déduit A' et B' projetés orthogonaux de A et B sur $\mathcal{D}$.

(b) $B'(2+i)$ donc B' a pour image le point d'affixe $z = 2iz_{B'}+10$
$= 2i(2+i)+10$
$= 8+4i = z_{A'}$

d'où $B' \longmapsto A'$

(c) On a $\Omega \longmapsto \Omega$ et s similitude d'angle $+\frac{\pi}{2}$.
$B' \longmapsto A'$

d'où $(\overrightarrow{\Omega B'}, \overrightarrow{\Omega A'}) = +\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ $\Rightarrow$ $\Omega A'B'$ rectangle en Ω
$\Rightarrow$ Ω point du cercle de diamètre [A'B']

II 1 (a) s similitude directe et $O \longmapsto A$
$B \longmapsto O$

d'où s a pour angle $\theta = (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})\ (2\pi)$
$= +\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

donc s a pour angle $\frac{\pi}{2}$.

(b) $\left.\begin{array}{l} O \xrightarrow{s} A \\ \Omega \xrightarrow{s} \Omega \end{array}\right\}$ donc $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega A}) = +\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ $\Rightarrow$ ΩOA rectangle en Ω

d'où Ω point du cercle de diamètre [OA].

on montre de même que Ω point du cercle de diamètre [OB] et $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega O}) = \frac{\pi}{2}$

on a $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) = (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega O}) + (\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega A})\ (2\pi)$
$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi\ (2\pi)$

d'où Ω, B, A alignés

de plus $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ donc Ω pied de la hauteur du triangle ABO issue de O.

② ⓐ s similitude d'angle $+\frac{\pi}{2}$, $B \overset{s}{\longmapsto} O$ $\Big\}$ donc l'image de (BB') est une droite perpendiculaire à (BB') passant par O

donc (BB') a pour image $\mathcal{D}$.

s similitude d'angle $+\frac{\pi}{2}$, $s(O) = A$, $O \in \mathcal{D}$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{D}$ a pour image une droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant $s(O) = A$

donc $\mathcal{D}$ a pour image (AA')

ⓑ $\{B'\} = \mathcal{D} \cap (BB')$, $s(\mathcal{D}) = (AA')$, $s((BB')) = \mathcal{D}$ $\Big\}$ (Conservation de l'intersect°) $\Rightarrow s(B') \in (AA') \cap \mathcal{D}$

$\Rightarrow s(B') \in \{A'\} \Rightarrow s(B') = A'$

ⓒ $B' \overset{s}{\longmapsto} A'$, $\Omega \overset{s}{\longmapsto} \Omega$, s d'angle $+\frac{\pi}{2}$ $\Big\}$ $\Rightarrow (\overrightarrow{\Omega B'}, \overrightarrow{\Omega A'}) = +\frac{\pi}{2}$ (2π) $\Rightarrow \Omega B'A'$ rectangle en

donc Ω point du cercle de diamètre $[A'B']$