

(I) Soit P_m la ppte $7 \mid 2^{3m+1} - 2$.

Montrons par récurrence que $\forall m \in \mathbb{N}$ P_m est vraie.

Etape 1: pour $m=0$; $2^{3 \cdot 0 + 1} - 2 = 2 - 2 = 0$

et $7 \mid 0 \Rightarrow P_0$ est vraie.

Etape 2: Soit $q \in \mathbb{N}$, supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie.

P_q vraie donc $7 \mid 2^{3q+1} - 2$

\Rightarrow il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{3q+1} - 2 = 7k$. (*)

$$\text{et } 2^{3(q+1)+1} - 2 = 2^{3q+1} \times 2^3 - 2$$

$$\text{mais d'après (*) } 2^{3q+1} = 7k + 2$$

$$\text{d'où } 2^{3(q+1)+1} - 2 = (7k + 2) \times 2^3 - 2$$

$$= 2^3 \times 7k + 2^4 - 2$$

$$= 2^3 \times 7k + 14$$

$$= 7(2^3 \times k + 2)$$

donc $7 \mid 2^{3(q+1)+1}$ d'où P_{q+1} vraie.

Enfinement, $\forall m \in \mathbb{N}$, 7 divise $2^{3m+1} - 2$

$$\begin{array}{r|l} n^2 + 3n + 4 & n+1 \\ m^2 + m & m+2 \\ \hline 2m + 4 & \\ 2m + 2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

On déduit donc que $m^2 + 3m + 4 = (m+1)(m+2) + 2$

donc

$$m+1 \mid m^2+3m+4 \iff n+1 \mid (m+1)(m+2)+2$$

$$\iff m+1 \mid 2 \text{ par combinaison linéaire}$$

$$\iff m+1 \in D_2 \text{ avec } D_2 = \{-2, -1, 1, 2\}$$

Les entiers solution du problème sont $\{-3, -2, 0, 1\}$

III) Le problème posé équivaut à déterminer m satisfaisant

$$\begin{cases} m = 43q + r \\ r = q^2 \\ 0 \leq r < 43 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} m = 43q + q^2 \\ 0 \leq q^2 < 43 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} m = 43q + q^2 \\ q \in \{0, 1, 2, \dots, 6\} \end{cases}$$

finalement $m = 0$ (à exclure car on cherche $m \in \mathbb{N}^*$)

$$m = 44 \quad (\text{pour } q=1)$$

$$m = 90 \text{ ou } m = 138 ; n = 188 ; m = 240 ; m = 294$$

on a $S = \{44, 90, 138, 188, 240, 294\}$