16 déc 2011

DS4 - spé Maths

I 1 a $11 \wedge 7 = 1$ donc d'après le th de Bezout

il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $11u + 7v = 1$

On a $11 \times 2 - 7 \times 3 = 22 - 21 = 1$

donc le couple $(2,3)$ est solut° de $11u - 7v = 1$

b Par produit par 5 on déduit

$11 \times 10 - 7 \times 15 = 5$ donc $(10,15)$ solut° particulière de (E).

c (E) : $11x - 7y = 5$

donc par différence avec $11 \times 10 - 7 \times 15 = 5$ on déduit

$11(x-10) - 7(y-15) = 0$

$\Leftrightarrow 11(x-10) = 7(y-15)$ $(*)$

d'où $\left.\begin{array}{l} 11 \mid 7(y-15) \\ 11 \wedge 7 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$ d'après le th de Gauss $11 \mid y-15$

donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - 15 = 11k$

On déduit alors avec $(*)$ $11(x-10) = 7 \times 11k$ d'où $x - 10 = 7k$

finalement $\left\{\begin{array}{l} x = 10 + 7k \\ y = 15 + 11k \end{array}\right.$

Vérifions que le couple $(x;y)$ est bien solution :

$$11x - 7y = 11(10+7k) - 7(15+11k)$$
$$= 11 \times 10 - 7 \times 15$$
$$= 5$$

donc on a bien $S = \{(10+7k ; 15+11k) ; k \in \mathbb{Z}\}$

d) $\begin{cases} M(x;y) \in D \\ D : 11x - 7y = 5 \\ 0 \leq x \leq 50 \,;\, 0 \leq y \leq 50 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 10 + 7k \,;\, y = 15 + 11k \,,\, k \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq 10 + 7k \leq 50 \,;\, 0 \leq 15 + 11k \leq 50 \end{cases}$ (car (x,y) sol de (E))

$\iff \begin{cases} x = 10 + 7k \,;\, y = 15 + 11k \,,\, k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{10}{7} \leq k \leq \frac{40}{7} \text{ et } -\frac{15}{11} \leq k \leq \frac{35}{11} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 10 + 7k \,,\, y = 15 + 11k \,,\, k \in \mathbb{Z} \\ -1 \leq k \leq 5 \text{ et } -1 \leq k \leq 3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 10 + 7k \,;\, y = 15 + 11k \\ -1 \leq k \leq 3 \end{cases}$

il y a donc 5 points de la droite satisfaisant les conditions demandées.

2) (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$

a) Soit $(x;y)$ solut° de (F)

alors $11x^2 - 7y^2 = 5 \implies 11x^2 - 7y^2 \equiv 0 \ (5)$

$\iff x^2 \equiv 2y^2 \ (5)$

b)

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à	0	1	4	4	1

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à	0	2	3	3	2

Les restes possibles de la division de x^2 par 5 sont 0, 1, 4

Les restes possibles de la division de $2y^2$ par 5 sont 0, 2, 3

c) (x,y) solution de (F) $\Longrightarrow x^2 \equiv 2y^2\ (5)$

et d'après les tableaux précédents, l'unique possibilité

d'avoir $x^2 \equiv 2y^2\ (5)$ est que $x \equiv 0\ (5)$ et $y \equiv 0\ (5)$

c'est-à-dire x multiple de 5 et y multiple de 5 (d'après le tableau)

3) Si x, y multiples de 5 et solution de (F) alors

$x = 5x'$; $y = 5y'$ et $11x^2 - 7y^2 = 5$

$$\Longleftrightarrow 11(5x')^2 - 7(5y')^2 = 5$$

$$\Longleftrightarrow 25(11x'^2 - 7y'^2) = 5$$

$$\Longleftrightarrow 5(11x'^2 - 7y'^2) = 1$$

d'où 5 divise 1, ce qui est absurde

donc il n'existe pas x, y multiples de 5 avec (x,y) solution de (F)

Conclusion : D'après 2c) (x,y) solution de (F) $\Longrightarrow x, y$ multiples de 5

d'après ce qui précède x, y multiples de 5 $\Longrightarrow (x,y)$ n'est pas sol de (F)

donc l'équation (F) n'a pas de solution.

II)

$47 = 27 + 20$

$27 = 20 + 7$

$20 = 2\times 7 + 6$

$7 = 6 + 1$

d'où $1 = 7 - 6$

$= 7 - (20 - 2\times 7)$

$= 7 + 2\times 7 - 20$

$= 3\times 7 - 20$

$= 3\times(27 - 20) - 20$

$= 3\times 27 - 4\times 20$

$= 3\times 27 - 4\times(47 - 27)$

$= 7\times 27 - 4\times 47$

donc $(-4, -7)$ solution particulière

de $47x - 27y = 1$