DS 1 - 1ère Maths

I

Dressons le triangle de Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

d'où $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

et donc $N = (a+b)^5 - a^5 - b^5$

$= 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4$

$= 5(a^4b + 2a^3b^2 + 2a^2b^3 + ab^4)$

En conséquence 5 divise N.

II

On a $\begin{cases} a+b = 2096 \\ a = bq + r \text{ avec } q=5 \text{ et } r = 206 \ ; \ 0 \leq r < b \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a+b = 2096 \\ a = 5b + 206 \ ; \ b > 206. \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = 5b + 206. \\ 6b + 206 = 2096 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = 5b + 206 \\ 6b = 1890 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} b = 315 \\ a = 1781 \end{cases}}$

III

a est impair donc $a = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$

en conséquence

$N = a^2 + 4a - 5$

$= (2k+1)^2 + 4(2k+1) - 5 = 4k^2 + 4k + 1 + 8k + 4 - 5$

J'ai $N = 4k^2 + 12k$

$= 4k(k+3)$

et $k(k+3)$ est toujours pair car soit k est pair (et $k+3$ impair)

soit k impair et donc $k+3$ est pair

Finalement $k(k+3)$ étant pair, on a $k(k+3) = 2K$ avec $K \in \mathbb{Z}$

et donc $N = 4 \times 2K = 8K$

donc $\boxed{8 \text{ divise } N.}$

IV n est premier.

. si $n = 2$ alors $n + 7 = 9$ n'est pas premier.

- si $n > 2$ et n premier alors n impair donc $n+7$ est un nombre pair qui n'est donc pas premier

V $x^2 = 4y^2 + 3$

$\Longleftrightarrow x^2 - 4y^2 = 3$

$\Longleftrightarrow (x-2y)(x+2y) = 3$ (donc $x-2y$ et $x+2y$ diviseurs de 3)

4 cas sont possibles

① $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

② $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

③ $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + 2y = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

④ $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

Finalement il n'y a pas de solut° $\boxed{S = \emptyset}$

VI Par hypothèses on a $\begin{cases} 250 = qb + 7 & \text{avec } 0 \leq 7 < b \\ 500 = q'b + 5 & \text{avec } 0 \leq 5 < b \end{cases}$

d'où $b > 7$ et b satisfait les 2 équations.

par différence de $L_2 - L_1$ on a

$250 = b(q'-q) + 5 - 7 \iff 250 = b(q'-q) - 2$

$\iff 250 = b(q'-q-1) + b - 2$

et sachant que $b > 7$ on a $0 \leq b - 2 < b$

ainsi la dernière écriture est la division euclidienne de 250 par b ; le reste étant $b - 2$.

En conséquence (par hypothèse) $b - 2 = 7 \Rightarrow \boxed{b = 9}$

Vérificat° : $250 = 27 \times 9 + 7$
$500 = 59 \times 9 + 5$