DS2

I

① On a $2^4 \equiv 16 \equiv -1 \quad (17)$

$$\Longrightarrow 2^{2014} \equiv 2^{4\times 503+2} \equiv (2^4)^{503} \times 2^2 \quad (17)$$

$$\equiv -4 \quad (17)$$

$$\equiv 13 \quad (17)$$

donc $2^{2014} \equiv 13 \ (17)$

② $2^2 \equiv 4 \ (10)$; $2^3 \equiv 8 \ (10)$; $2^4 \equiv 6 \ (10)$; $2^5 \equiv 2 \ (10)$

et on obtient ainsi un cycle qui ne passe pas par 1

ainsi : $2^{630} \equiv 2^{5\times 126} \equiv (2^5)^{126} \equiv 2^{126} \quad (10)$

$$\equiv 2^{5\times 25+1} \quad (10)$$

$$\equiv (2^5)^{25} \times 2 \equiv 2^{25} \times 2 \quad (10)$$

$$\equiv (2^5)^5 \times 2 \quad (10)$$

$$\equiv 4 \quad (10)$$

d'où $2^{630} \equiv 4 \quad (10)$

③ $3^2 \equiv 9 \ (11)$

$3^3 \equiv 5 \ (11)$

$3^4 \equiv 4 \ (11)$

$3^5 \equiv 12 \equiv 1 \ (11)$ donc $3^{573} \equiv 3^{5\times 114+3} \equiv (3^5)^{114} \times 3^3 \quad (11)$

$$\equiv 3^3 \equiv 5 \quad (11)$$

donc $3^{573} \equiv 5 \ (11)$

II

On a $-27 \equiv 1 \ (7)$ et $54 \equiv 5 \ (7)$

ainsi : $(E) : 3x^2 - 27x + 54 \equiv 0 \quad (7)$

$$\iff 3x^2 + x + 5 \equiv 0 \quad (7) \iff 3x^2 + x \equiv 2 \quad (7)$$

Dressons alors un tableau de congruences modulo 7

x (7)	0	1	2	3	4	5	6
x^2 (7)	0	1	4	2	2	4	1
$3x^2+x$ (7)	0	4	0	2	3	3	2

D'après le tableau x solut° de (E) $\iff x \equiv 3\ (7)$ ou $x \equiv 6\ (7)$

ainsi $S = \{7k+3;\ 7k+6;\ k \in \mathbb{N}\}$

III 1) $7 \equiv 3\ (4)$

$7^2 \equiv 1\ (4)$

ainsi si $n = 2k$ alors $7^n \equiv (7^2)^k \equiv 1\ (4)$

si $n = 2k+1$ alors $7^n \equiv (7^2)^k \times 7 \equiv 7 \equiv 3\ (4)$.

2) <u>Cas 1 :</u> si n pair alors l'équation proposée donne

$$7^{n+1} - (n+1)7^n - 1 \equiv 0\ (4)$$

$\iff 7 - (n+1) - 1 \equiv 0\ (4)$

$\iff 5 - n \equiv 0\ (4)$

$\iff n \equiv 1\ (4) \iff n = 1 + 4q \quad q \in \mathbb{Z}$

et ceci est impossible avec n pair.

<u>Cas 2 :</u> si n impair, $7^n \equiv 3 \equiv -1\ (4)$

ainsi $7^{n+1} - (n+1)7^n - 1 \equiv 0\ (4)$

$\iff -7 + (n+1) - 1 \equiv 0\ (4)$

$\iff n \equiv 7\ (4)$

$\iff n \equiv -1\ (4)$ (et donc n est bien impair)

$S = \{-1 + 4k,\ k \in \mathbb{Z}\}$