DS3 - spécialité

I

① $10 \equiv 3\ (7) \implies 10^3 \equiv 3^3\ (7)$

$\equiv 27\ (7)$

$\equiv -1\ (7)$

② $N = \overline{a00b}$

$7 \mid N \iff 10^3 a + b \equiv 0\ (7)$

$\iff b - a \equiv 0\ (7)$ avec $b, a \in \{0, 1, \dots 9\}$ et $a \neq 0$.

Disjonction des cas selon b:

si $b = 9$ alors $a = 2$ ou $a = 9$

si $b = 8$ alors $a = 1$ ou $a = 8$

si $b = 7$ alors $a = 0$ (interdit) ou $a = 7$

si $b = 6$ alors $a = 6$

si $b = 5$ alors $a = 5$

si $b = 4$ alors $a = 4$

si $b = 3$ alors $a = 3$

si $b = 2$ alors $a = 2$ ou $a = 9$

si $b = 1$ alors $a = 1$ ou $a = 8$

si $b = 0$ alors $a = 7$

Ainsi les nombres solutions sont $\boxed{\{2009; 9009; 1008, 8008, 7007; 6006, 5005; 4004, 3003; 2002; 9002; 1001, 8001, 7000\}}$

Remarque: On peut aller un peu plus vite en disant

$a \equiv b\ (7) \iff a = b$ avec $a \in \{1, \dots 9\}$ ou bien $a = 1; b = 8; a = 2; b = 9$

$b = 0; a = 7; b = 1, a = 8; b = 2, a = 9$

II

$8n^2 - 9n + 19 \equiv 0\ (6) \iff 2n^2 + 3n + 1 \equiv 0\ (6)$ car $8 \equiv 2\ (6)$

$-9 \equiv 3\ (6)$

$19 \equiv 1\ (6)$

On dresse un tableau de congruences modulo 6

n	0	1	2	3	4	5
n^2	0	1	4	3	4	1
$2n^2$	0	2	2	0	2	2
$3n$	0	3	0	3	0	3
$2n^2+3n$	0	5	2	3	2	5

Ainsi n solution de (E)

$\iff 2n^2 + 3n \equiv 5\ (6)$

d'où $\boxed{S = \{6k+1;\ 6k+5;\ k \in \mathbb{Z}\}}$

III

$n = 2^{\alpha} 3^{\beta}$

① Nous avons la décomposition en facteurs premiers de n donc les diviseurs de n sont de la forme $d = 2^{\alpha'} 3^{\beta'}$ avec $0 \leq \alpha' \leq \alpha$, $0 \leq \beta' \leq \beta$

ainsi il y a $(\alpha+1)\times(\beta+1)$ diviseurs de n.

② On a $n^2 = 2^{2\alpha} 3^{2\beta}$ est la décomposit° en facteurs premiers de n^2 ainsi le nombre de diviseurs de n^2 est $(2\alpha+1)(2\beta+1)$

③ Ainsi d'après l'énoncé $(2\alpha+1)(2\beta+1) = 3(\alpha+1)(\beta+1)$

$$\iff 4\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 1 = 3\alpha\beta + 3\alpha + 3\beta + 3$$

$$\iff \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = 3$$

$$\iff (\alpha-1)(\beta-1) = 3$$

④ $\alpha - 1$ diviseur de 3 ainsi que $\beta - 1$. $D_3 = \{-3 ; -1, 1, 3\}$

d'où $\alpha - 1 = -3 \iff \alpha = -2$ impossible.

$\alpha - 1 = -1 \iff \alpha = 0$ alors $\beta - 1 = -3$ et $\beta = -2$ impossible

$\alpha - 1 = 1 \iff \alpha = 2$ alors $\beta - 1 = 3$ et $\beta = 4$

$\alpha - 1 = 3 \iff \alpha = 4$ alors $\beta - 1 = 1$ et $\beta = 2$

les couples (α, β) solutions sont $(2;4)$ et $(4;2)$

les entiers n correspondants sont $n = 2^2 3^4 = 324$ et $n = 2^4 3^2 = 144$

IV

① ⓐ $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$

$$= \beta 12^2 + 12 + \alpha = 11 \times 12^2 + 12 + 11 = 1606$$

ⓑ $N_2 = 1131$. Dressons la liste des divisions successives par 12

$$\begin{array}{r|l}
1131 & 12 \\
\underline{3} & 94 \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
94 & 12 \\
\underline{10} & 7 \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
7 & 12 \\
\underline{7} & 0 \\
\end{array}$$

On a alors

$$N_2 = 3 + 10 \times 12 + 7 \times 12^2$$

$$= \overline{7\alpha 3}^{12}.$$

② ⓐ $12 \equiv 0 \ (3) \implies \forall i \geq 1 \quad 12^i \equiv 0 \ (3)$

ainsi $N = \overline{a_n \cdots\cdots a_0}^{12}$

$= a_0 + 12a_1 + 12^2 a_2 + \cdots\cdots 12^n a_n$

$\equiv a_0 \quad (3).$

Ainsi $3 \mid N \iff N \equiv 0 \quad (3)$

$\iff a_0 \equiv 0 \quad (3)$

$\iff$ Le chiffre des unités de N est divisible par 3.

ⓑ $N_2 = \overline{7\alpha 3}^{12}$ donc à l'aide du critère de divisibilité 3 divise N_2

En base 10 $N_2 = 1131$ et la somme de ses chiffres est 6

donc 3 divise N_2 par critère de divisibilité.

③ ⓐ $12 \equiv 1 \ (11)$ ainsi $\forall i \in \mathbb{N} \ ; \quad 12^i \equiv 1 \ (11)$

d'où $N = a_0 + 12a_1 + \cdots\cdots 12^n a_n$

$\equiv a_0 + a_1 + \cdots\cdots + a_n. \quad (11)$

ainsi $11 \mid N \iff N \equiv 0 \ (11)$

$\iff a_0 + a_1 + \cdots\cdots + a_n \equiv 0 \ (11)$

Finalement $11 \mid N$ si et seulement si la somme des chiffres composants N est un multiple de 11.

ⓑ $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$

la somme des chiffres de N_1 est $\beta + 1 + \alpha = 11 + 1 + 10$
$= 22$

donc N_1 est divisible par 11 par critère de divisibilité

$N_1 = 1606$ en base 10.

La somme alternée des chiffres vaut $6 + 6 - 1 = 11 \implies 11$ divise N_1

④ $N = \overline{x4y}^{12}$

$33 = 11 \times 3$ et $11 \wedge 3 = 1$ donc $33 | N \iff 11 | N$ et $3 | N$

par critère $3 | N \iff y \in \{0 ; 3 ; 6 ; 9\}$

- si $y = 0$ alors $N = \overline{x40}^{12}$

par critère $11 | N \iff x + 4 \equiv 0 \ (11)$

$\iff x \equiv -4 \ (11)$

$\iff x \equiv 7 \ (11)$ et $x \in [0, 11] \implies \underline{x = 7}$

- si $y = 3$ alors $N = \overline{x43}^{12}$

par critère $11 | N \iff x + 4 + 3 \equiv 0 (11)$

$\iff x \equiv -7 \ (11)$

$\iff x \equiv 4 \ (11)$ et $x \in [0, 11] \implies \underline{x = 4}$

- de même si $y = 6$ alors $N = \overline{x46}^{12}$

par critère $11 | N \iff x + 10 \equiv 0 (11)$

$\iff x \equiv 1 \ (11) \implies x = 1$

- si $y = 9$ par critère $11 | N \iff x + 4 + 9 \equiv 0 \ (11)$

$\iff x \equiv -13 \quad (11)$

$\equiv 9 \quad (11) \implies x = 9.$

donc les valeurs possibles de N sont : $\boxed{\overline{740}^{12} ; \overline{443}^{12} ; \overline{146}^{12} ; \overline{949}^{12}}$