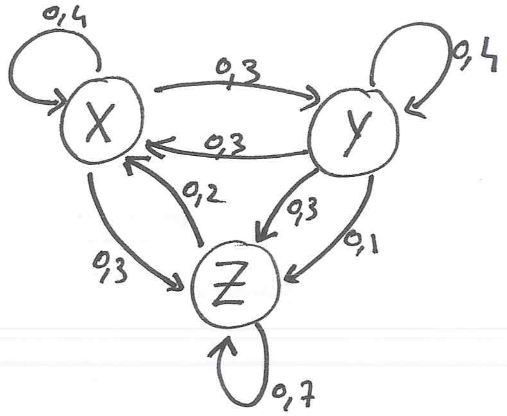
DS 7 (1h)

Partie A.

① On a le graphe suivant :



② On a $T = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

③ D'après l'énoncé $L_0 = (0{,}1 \quad 0{,}2 \quad 0{,}7)$.

A l'aide de la calculatrice $L_1 = L_0 \times T = (0{,}24 \quad 0{,}18 \quad 0{,}58)$

$L_2 = L_1 \times T$

$= L_0 \times T \times T = L_0 \times T^2 = (0{,}266 \quad 0{,}202 \quad 0{,}532)$

$L_3 = L_0 T^3 = (0{,}2734 \quad 0{,}2138 \quad 0{,}5128)$

④ $L_{30} = L_0 T^{30} \simeq (0{,}2777 \quad 0{,}2222 \quad 0{,}5)$

On conjecture qu'au bout de quelques mois on a

28% des consommateurs avec le dentifrice X
22% - - - - - - - - - - - Y
50% - - - - - - - - - - - Z

Partie B :

① On a $(x_{n+1} \; y_{n+1} \; z_{n+1}) = (x_n \; y_n \; z_n)T$

donc $\begin{cases} x_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2z_n \\ y_{n+1} = 0,3x_n + 0,4y_n + 0,1z_n \\ z_{n+1} = 0,3x_n + 0,3y_n + 0,7z_n \end{cases}$

② On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, \; x_n + y_n + z_n = 1$

en effet, $P(X_n \cup Y_n \cup Z_n) = 1$ puisque le consommateur utilise toujours un dentifrice.

On a alors $z_n = 1 - x_n - y_n$.

ainsi d'après ① on a $\begin{cases} x_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2(1 - x_n - y_n) \\ y_{n+1} = 0,3x_n + 0,4y_n + 0,1(1 - x_n - y_n) \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x_{n+1} = 0,2x_n + 0,1y_n + 0,2 \\ y_{n+1} = 0,2x_n + 0,3y_n + 0,1 \end{cases}$

C'est-à-dire $\boxed{U_{n+1} = AU_n + B}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$

③ $I - A = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,1 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$

alors $\det(I-A) = 0,8 \times 0,7 - 0,1 \times 0,2 = \frac{54}{100} \neq 0 \Longrightarrow I - A$ inversible

Par th : $(I-A)^{-1} = \frac{1}{\det(I-A)} \times \begin{pmatrix} 0,7 & +0,1 \\ +0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{(I-A)^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 70 & +10 \\ +20 & 80 \end{pmatrix}}$.

(b) $C = AC + B$

$\Leftrightarrow C - AC = B \Leftrightarrow (I-A)C = B$

$\Leftrightarrow \underbrace{(I-A)^{-1} \times (I-A)}_{I} C = (I-A)^{-1}B$

$\Leftrightarrow C = (I-A)^{-1}B$

et $\begin{pmatrix} 70 & +10 \\ +20 & 80 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{C = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/18 \\ 2/9 \end{pmatrix}}$

(4) Montrons par récurrence sur n que $V_n = A^n V_0$.

Initialisat° : pour $n=0$; $A^0 = I$ et donc $V_0 = I V_0$ ok.

Hérédité : soit $q \in \mathbb{N}$; supposons $V_q = A^q V_0$

alors $V_{q+1} = U_{q+1} - C$

$= AU_q + B - (AC - B)$. car $C = AC + B$.

$= AU_q - AC$

$= A(U_q - C)$.

$= A V_q$

$= A A^q V_0 = A^{q+1} V_0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = A^n V_0$

⑤ ⓐ A la calculatrice on obtient

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix}$$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$. $D^n = \begin{pmatrix} 0,4^n & 0 \\ 0 & 0,1^n \end{pmatrix}$

et $D^n = (P^{-1}AP)^n$

$$= P^{-1}A\underbrace{P \times P^{-1}}_{=I}A\underbrace{P \times P^{-1}}_{=I}AP \times \cdots\cdots \times P^{-1}A\underbrace{P \times P^{-1}}_{=I}AP \quad (n \text{ fois})$$

$$= P^{-1}A^nP. \qquad \text{(à faire par récurrence en principe)}$$

ainsi $D^n = P^{-1}A^nP$

Donc par produit à gauche par P et à droite par P^{-1} on a

$\underbrace{PD^nP^{-1} = \underbrace{PP^{-1}}_{=I}A^n\underbrace{PP^{-1}}_{=I}}$ d'où $A^n = PD^nP^{-1}$.

finalement $A^n = P\begin{pmatrix} 0,4^n & 0 \\ 0 & 0,1^n \end{pmatrix}P^{-1}$

ⓑ $|0,4| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 0,4^n = 0$

$|0,1| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 0,1^n = 0.$

on déduit que les coefficients de A^n lorsque n tend vers l'infini tendent vers 0

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0.$

c) $V_n = A^n V_0$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - C) = 0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = C}$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/18 \\ 2/9 \end{pmatrix}$$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \frac{5}{18}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \frac{2}{9}$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 1 - \lim\limits_{n \to +\infty} x_n - \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$

$= \frac{1}{2}$

On a donc $\frac{5}{18} \simeq 28\%$ des consommateurs qui utilisent le dentifrice X

$\frac{2}{9} \simeq 22\%$ — — — — — — — — — — Y

$\frac{1}{2} \simeq 50\%$ — — — — — — — — — — Z

c'est donc bien cohérent avec les résultats de la partie A