Devoir n° 1 du 22 septembre 2009

(I) ① $P(x) = x^2 + (m-3)x + 1$

$$\Delta = (m-3)^2 - 4$$
$$= m^2 - 6m + 5$$

On étudie le signe de Δ en fonction de m.
Calculons le discriminant Δ'

$$\Delta' = 36 - 20 = 16.$$

donc Δ s'annule deux fois en $m_1 = \frac{+6+4}{2} = 5$
et $m_2 = 1$.

et le signe de Δ est donné par

m		1		5	
Δ	+	0	−	0	+

donc P a deux racines lorsque $m \in]-\infty ; 1[\cup]5 ; +\infty[$
P a une racine lorsque $m \in \{1 ; 5\}$
P n'a aucune racine si $m \in]1 ; 5[$.

② 2 racine de P $\iff P(2) = 0$
$\iff 4 + 2(m-3) + 1 = 0$
$\iff 2m = +1 \iff m = \frac{1}{2}$

pour $m = \frac{1}{2}$, 2 racine de P.

(II) $x > \frac{1}{x}$

$\iff x - \frac{1}{x} > 0 \iff \frac{x^2-1}{x} > 0 \iff \frac{(x-1)(x+1)}{x} > 0$

on dresse le tableau de signes :

x		−1		0		+1	
$(x-1)(x+1)$	+	0	−		−	0	+
x	−		−	0	+		+
$\frac{(x-1)(x+1)}{x}$	−	0	+	||	−	0	+

d'où $S =]-1 ; 0[\cup]1 ; +\infty[$

(III) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-7x+10}$

par thm, $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Factorisons $x^2 - 7x + 10$: $\Delta = 9$ donc $x_1 = \frac{7+3}{2} = 5$ et $x_2 = 2$

d'où $x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-2)$

le signe de $x^2 - 7x + 10$ est donné par

x		2		5	
$x^2-7x+10$	+	0	−	0	+

donc $\lim\limits_{x\to 2^+} x^2-7x+10 = 0^-$

et $\lim\limits_{x\to 2^+} x+5 = 7$ d'où par quotient $\lim\limits_{2^+} f = -\infty$

② $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{|x-2|}$

• pour $x<2$; $|x-2| = -x+2$ donc $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{-x+2}$

et par thm ; $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$.

$$f(x) = \frac{x^2-2x}{-x+2} \quad \text{pour } x<2$$
$$= \frac{x(x-2)}{-x+2} \quad \text{pour } x<2$$
$$= -x.$$

d'où $\lim\limits_{2^-} f = -2$.

• pour $x>2$; $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-2}$ car $|x-2| = x-2$.

$$= \frac{x(x-2)}{x-2} = x$$ donc $\lim\limits_{2^+} f = +2$

③ $f(x) = -x + \sqrt{x^2-4}$.

$\left.\begin{array}{l} X = x^2-4 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-4 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-4} = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$

$\left.\begin{array}{l} X = x^2-4 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-4 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-4} = +\infty$.

On a $f(x) = \dfrac{(-x+\sqrt{x^2-4})(+x+\sqrt{x^2-4})}{+x+\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{x^2-4-x^2}{x+\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{-4}{x+\sqrt{x^2-4}}$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2-4} = +\infty$ (par somme)

donc par quotient, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

④ $\forall x \in \mathbb{R} \qquad -3 \leq 3\sin x \leq +3$

d'où $\qquad 2 \leq 5 + 3\sin x \leq 8$

$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2} \geq \frac{1}{5+3\sin x} \geq \frac{1}{8}$ (car $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

et pour $x < 0$ on déduit par produit

$$\frac{x}{2} \leq f(x) \leq \frac{x}{8}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{8} = -\infty$ donc d'après le th de comparaison $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

⑤ $f(x) = \frac{\sin(7x)}{2x} = \frac{\sin(7x)}{7x} \times \frac{7}{2}$

$X = 7x$

$\lim\limits_{x \to 0} 7x = 0$

$\lim\limits_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$

$\Rightarrow$ par composée $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1$

donc par produit, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{7}{2}$

IV $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 2x^2}{x+1}}$

① D_f ? ; il faut $\frac{x^3-2x^2}{x+1} \geq 0$

$\iff x^2 \frac{(x-2)}{x+1} \geq 0$

Tableau de signes

x		-1		0		2	
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$\frac{x^3-2x^2}{x+1}$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	0	$+$

ne pas l'oublier ....

d'où $D_f =]-\infty ; -1[\cup [2 ; +\infty[\cup \{0\}$

② $X = \frac{x^3 - 2x^2}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x+1} = +\infty$ (par th)

$\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

$\Rightarrow$ par composée, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

③ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2(x-2)}{x+1}}$

$= |x| \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$

$= -x \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$ lorsque $x < 0$.

donc pour $x<0$; $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = -\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$

$$\left.\begin{array}{l} X = \dfrac{x-2}{x+1} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-2}{x+1} = 1 \text{ (par th)} \\ \lim\limits_{X \to 1} \sqrt{X} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Composée } \lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = 1$$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$

Ⓥ $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

f dérivable d'après les règles de dérivabilité et $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 3(x^2-1)$

$= 3(x-1)(x+1)$ d'où le tableau de variations de f :

x		-1		$+1$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [-1;1] \text{ (car dérivable)} \\ f \text{ strictement décroissante sur } [-1;1] \\ f(-1) = 3 \ ; \ f(+1) = -1 \\ 0 \in [-1;3] \end{array}\right\} \Rightarrow \text{d'après le thm de la bijection il existe } \alpha \text{ unique dans } [-1;1] \text{ tel que } f(\alpha) = 0.$$

Ⓥⓘ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x-1} & x \neq 1 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2)$

$= x(x-1)(x-2)$

donc pour $x \neq 1$; $f(x) = x(x-2)$

on a donc $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$

et $f(1) = -1$ donc f est continue en -1.

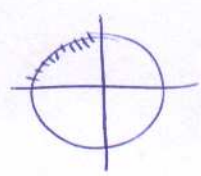
(VII) (1) $\forall x \in \mathbb{R}$; $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

d'où $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$= 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

donc $|\sin x| = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

or $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ d'où $\sin x \geqslant 0$



et donc $\sin x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

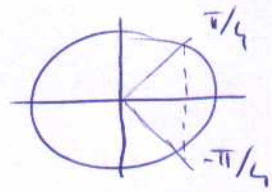
(2) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{4} - \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

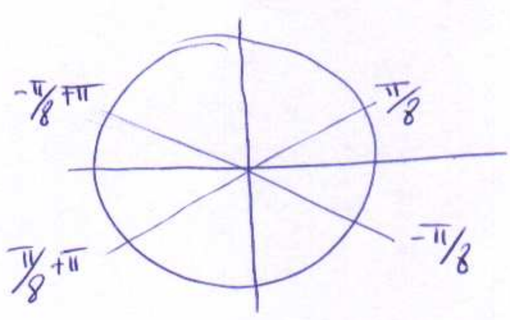
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc $2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

ou $2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$



d'où $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$



mais on sait que $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$

d'où l'unique possibilité est $x = -\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7\pi}{8}$

(VIII) On a $\begin{cases} a = 35q + 15 \\ a + x = 35(q+1) + 12 \end{cases}$ et on cherche x.

par différence on a $x = 35 - 3 = 32$

il faut ajouter 32 à a.

IX $x^2 = 4y^2 + 3$ (E)

Rq : si (x,y) solution alors $(-x,y)$; $(-x;-y)$; $(x,-y)$ solutions.
Il suffit de chercher les solutions dans $\mathbb{N}^2$

$x^2 = 4y^2 + 3 \iff (x-2y)(x+2y) = +3$.

donc $x+2y$ diviseur de 3 ; c'est-à-dire $x+2y \in D_3 = \{-3;-1;1;3\}$

$x+2y=-3$ impossible dans $\mathbb{N}^2$
$x+2y=-1$

$\begin{cases} x+2y=1 \\ x-2y=+3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ impossible !

$\begin{cases} x+2y=+3 \\ x-2y=+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2 \\ y=+\frac{1}{2} \end{cases}$ impossible !

d'où $S = \emptyset$